Вятский государственный гуманитарный университет

П. М. Горев
М. О. Воловицкая

МАТЕМАТИКА
КУРС ПОДГОТОВКИ К ЕГЭ

СРЕДНИЙ УРОВЕНЬ СЛОЖНОСТИ

Учебное пособие

Киров
2012

УДК 51(075.8)
ББК 74.262.21я72
Г68

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Вятского государственного гуманитарного университета

Рецензенты:
доктор педагогических наук, доцент *С. И. Калинин*;
кандидат педагогических наук, доцент *М. В. Крутихина;*
кандидат педагогических наук, доцент *И. В. Ситникова;*
учитель математики
высшей квалификационной категории *Е. И. Шехирева*

Г68 **Горев, П. М.** Математика. Курс подготовки к ЕГЭ. Средний уровень сложности: учебное пособие / П. М. Горев, М. О. Воловицкая. – Киров: Изд-во ВятГГУ, 2012. – 130 с.

ISBN 978-5-456-00133-7

Учебный курс, представленный в пособии, в основном посвящен решению заданий первой части (задач типа В) Единого государственного экзамена по математике. Курс состоит из 32 последовательных занятий, каждое из которых рассчитано на 2 академических часа, и предназначен для целенаправленной подготовки учащихся к решению задач первой части ЕГЭ.

Курс был апробирован в малых группах абитуриентов ВятГГУ в 2010 –2012 годах.

Пособие может быть интересно абитуриентам и выпускникам средних школ, их учителям и наставникам, обеспечивающим качественную подготовку к ЕГЭ.

УДК 51(075.8)
ББК 74.262.21я72

ISBN 978-5-456-00133-7

Предисловие

У вас в руках учебное пособие, которое мы назвали «Математика. Курс подготовки к ЕГЭ». Это второе, исправленное и дополненное, издание проводимого авторами курса подготовки к ЕГЭ по математике. Оно состоит из двух основных разделов и направлено на обучение решению задач первой части ЕГЭ как на уроках, так и на занятиях спецкурса, электива, факультатива в традиционных и малых группах или индивидуально.

Первый раздел – справочник по математике – содержит сведения практически из всех разделов элементарной математики, необходимых для решения задач первой части. Включение справочных материалов в книгу обусловлено в первую очередь необходимостью собрать данные в одном месте для обеспечения быстрого доступа к нужной информации, что немаловажно в рамках подготовки к тестовым заданиям, где решающим оказывается правильное выполнение максимального числа заданий за короткий период времени.

Во втором разделе пособия содержатся задания к 32 занятиям (по два аудиторных часа каждое), последовательно излагающим содержание материала по следующим темам: текстовые задачи (ориентировано на усвоение заданий B1, B4, B12, B13); планиметрия (B3, B6); тригонометрия (B5, B6, B7, B14); корни, степени, логарифмы (B5, B7, B14); функции, производная (B2, B8, B14); уравнения и неравенства (B5, B12, B13); стереометрия (B9, B11); комбинаторика и вероятность (B10). Тем самым мы охватили все задачи первой части ЕГЭ; задания каждого занятия приведены в двух вариантах – для совместной или индивидуальной работы в классе и самостоятельных работ. Ко всем заданиям приведены ответы, в конце пособия приводится библиографический список использованных источников задачного материала.

Надеемся, что сведения, которые мы собрали под обложкой этой книги, сыграют свою положительную роль в подготовке и успешной сдаче Единого государственного экзамена по математике.

Желаем успеха!

Раздел первый
Краткий справочник по математике

Сведения, включенные в справочник, незначительно расширены по сравнению с тем, что предлагают типовые учебники математики для средних школ. Возможно, некоторые школьники найдут новую для себя информацию или более удобные формулы для решения задач. Советуем не пренебрегать работой с этой частью книги.

Для организации самостоятельной работы со справочником рекомендуем придерживаться следующего плана:

1) просмотрите справочник, около каждой формулы (или блока сведений) поставьте кружочек определенного цвета:
   - **синий** – формулу знаю наизусть, могу вспомнить в любой момент;
   - **зеленый** – формулу знаю, но часто забываю о ее существовании;
   - **красный** – новая для меня формула;
2) обведите в рамки формулы, выделенные зеленым кружочком, – это позволит при дальнейшей работе со справочником отделять эти формулы от другого текста, что обеспечит лучшее их запоминание;
3) выпишите на чистый листок формулы, выделенные красным кружочком; при решении задач листок держите в поле зрения и постоянно обращайтесь к нему;
4) запоминайте формулы, для этого
   - постарайтесь разобраться, почему верна формула (используйте для этого учебники математики или иные пособия);
   - отыщите задания, в которых используется формула, решите их;
   - постарайтесь составить задачи на использование формулы, решите их.
5) для расширения сведений используйте энциклопедии и справочники по математике, например, такие:
   - Выгодский М. Я. Справочник по элементарной математике,
   - Гусев В. А., Мордкович А. Г. Справочник по математике,
   - Алгебра в таблицах / Авт.-сост. Л. И. Звавич, А. Р. Рязановский,
   - Геометрия в таблицах / Авт.-сост. Л. И. Звавич, А. Р. Рязановский, или любые другие, доступные вам.

Алгебра

Модуль действительного числа

Модулем $|a|$ числа a называется само это число, если оно неотрицательно, и противоположное ему число, если оно отрицательно:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0, \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Выделим несколько основных свойств модуля, полезных при решении различных алгебраических и геометрических задач:

- $|a|^2 = a^2$,
- $||a|| = |a|$,
- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$,
- $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ $(b \neq 0)$,
- $|a + b| \leq |a| + |b|$,
- $|a| - |b| \leq \big||a| - |b|\big|$.

Степени и корни

При извлечении арифметического корня натуральной степени необходимо обращать внимание не только на область допустимых значений выражения (нельзя извлекать корни четной степени из отрицательных чисел), но и на результат:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a, \qquad \sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|, \qquad \sqrt[2n+1]{a^{2n+1}} = a.$$

Полезно знать и использовать при преобразовании выражений основные свойства арифметических корней (a и b – неотрицательные числа, n и p – натуральные):

- $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$,
- $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ $(b \neq 0)$,
- $\left(\sqrt[n]{a}\right)^p = \sqrt[n]{a^p}$,
- $\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[pn]{a}$,
- $\sqrt[nk]{a^k} = \sqrt[n]{a}$,
- $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[p]{a} = \sqrt[np]{a^{n+p}}$.

Используя формулу связи между арифметическим корнем и степенью с рациональным показателем для положительного числа c:

$$\sqrt[n]{c^p} = c^{\frac{p}{n}} \ (n \text{ и } p \text{ – натуральные}),$$

можно переходить от вычислений с корнями к более удобным вычислениям со степенями, в которых действия опираются на следующие свойства степеней положительных чисел (p и q – произвольные рациональные числа):

- $c^1 = c$,
- $c^0 = 1$,
- $c^{-p} = \frac{1}{c^p}$,
- $c^p \cdot c^q = c^{p+q}$,
- $\frac{c^p}{c^q} = c^{p-q}$,
- $(c^p)^q = c^{pq}$,
- $(c_1 \cdot c_2)^p = c_1^p \cdot c_2^p$,
- $\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^p = \frac{c_1^p}{c_2^p}$.

Логарифмы

Логарифмом $\log_a b$ положительного числа b по основанию a $(a > 0, a \neq 1)$ называется показатель степени p, в которую нужно возвести a, чтобы получить b: $a^p = b$.

Из определения следует *основное логарифмическое тождество*:

$$a^{\log_a b} = b.$$

Для положительных чисел a, b и c $(a \neq 1)$ имеют место следующие основные свойства логарифмов:

- $\log_a a = 1$,
- $\log_a 1 = 0$,
- $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$,
- $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$,
- $\log_{a^q} b^p = \frac{p}{q} \log_a b$,
- $\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$ $(b \neq 1)$,
- $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$ $(b \neq 1)$,
- $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$ $(b \neq 1)$.

Многочлены

Наиболее известны следующие *формулы сокращенного умножения* (a и b – произвольные выражения, имеющие смысл):

- $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ – разность квадратов,
- $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ – квадрат суммы (разности),
- $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$ – сумма (разность) кубов,
- $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2 b + 3ab^2 \pm b^3$ – куб суммы (разности).

Иногда бывает полезно использовать более сложные формулы:

- $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac,$
- $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$

В последней из них нужно обратить внимание на правую скобку: степени a с каждым шагом на единицу уменьшаются, а степени b – увеличиваются.

Для возведения в натуральную степень суммы двух выражений удобно использовать *треугольник Паскаля*: в вершине треугольника – его первой строке – записывают две единицы, каждая следующая строка строится по правилам: а) на левом и правом концах стоят единицы; б) каждое из чисел внутри строки равно сумме двух чисел, стоящих над ним.

1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

Для того чтобы раскрыть скобку многочлена вида $(a + b)^n$, берут коэффициенты из -й строки треугольника Паскаля, при этом степени a с каждым шагом на единицу уменьшаются, а степени b – увеличиваются:

- для 2-й степени: 1 2 1 $\quad a^2 + 2ab + b^2$,
- для 3-й степени: 1 3 3 1 $\quad a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$,
- для 4-й степени: 1 4 6 4 1 $\quad a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4$.

Квадратный трехчлен, квадратное уравнение

Уравнение второй степени $ax^2 + bx + c = 0$ с действительными коэффициентами a, b и c ($a \neq 0$) и переменной x называется *квадратным*; его левая часть называется *квадратным трехчленом*.

Число $D = b^2 - 4ac$ называется *дискриминантом квадратного трехчлена* и определяет количество корней квадратного уравнения:

- если $D > 0$, то уравнение имеет два различных корня:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a};$$

- если $D = 0$, то уравнение имеет один корень (два совпадающих):

$$x = \frac{-b}{2a},$$

- если $D < 0$, то уравнение корней не имеет.

Если квадратный трехчлен имеет корни (быть может, совпадающие), то его можно разложить на множители:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Часто при нахождении корней используют *теорему Виета:* если x_1 и x_2 – корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$, то их сумма и произведение выражаются через коэффициенты следующим образом:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Системы линейных уравнений (СЛУ)

Системой двух линейных уравнений с двумя неизвестными называют систему вида (a_1, a_2, b_1, b_2 – коэффициенты, c_1 и c_2 – свободные члены, а x и y – переменные):

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

Зная коэффициенты и свободные члены системы, можно исследовать ее на наличие решений и их количество:

- система имеет единственное решение, если $a_1b_2 \neq a_2b_1$;
- не имеет решений, если $a_1b_2 = a_2b_1$ и $a_1c_2 \neq a_2c_1$ или $b_1c_2 \neq b_2c_1$;
- имеет бесконечно много решений, если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$.

При решении СЛУ чаще пользуются следующими методами:

1) *метод подстановки:* выразить из любого уравнения одну переменную через другую; подставить в другое уравнение вместо этой переменной полученное выражение; решить получившееся уравнение; найти соответствующее значение второй переменной;

2) *метод сложения*: умножить уравнения системы, подбирая множители так, чтобы коэффициенты при одной из переменных стали противоположными числами; сложить почленно левые и правые части уравнений системы; решить получившееся уравнение; найти соответствующее значение второй переменной.

Прогрессии

Арифметической прогрессией называется последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, в которой каждый член, начиная со второго, равен сумме предыдущего члена и фиксированного числа d, называемого разностью арифметической прогрессии: $a_{i+1} = a_i + d$.

Для нахождения члена прогрессии используют формулы ($k < n$):

- $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$,
- $a_n = a_k + (n-k) \cdot d$,
- $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1})$,
- $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-k} + a_{n+k})$.

Сумму первых n членов арифметической прогрессии можно найти по одной из формул:

- $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$,
- $S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$.

Геометрической прогрессией называется последовательность чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n$, в которой каждый член, начиная со второго, равен произведению предыдущего члена и фиксированного числа q ($q \neq 0$), называемого знаменателем геометрической прогрессии: $b_{i+1} = b_i \cdot q$.

Для нахождения члена прогрессии используют формулы ($k < n$):

- $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$,
- $b_n = b_k \cdot q^{n-k}$,
- $b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$,
- $b_n = \sqrt{b_{n-k} \cdot b_{n+k}}$.

Сумму первых n членов геометрической прогрессии можно найти по одной из формул:

- $S_n = \frac{b_n \cdot q - b_1}{q-1}$,
- $S_n = \frac{b_1 \cdot (q^n - 1)}{q-1}$.

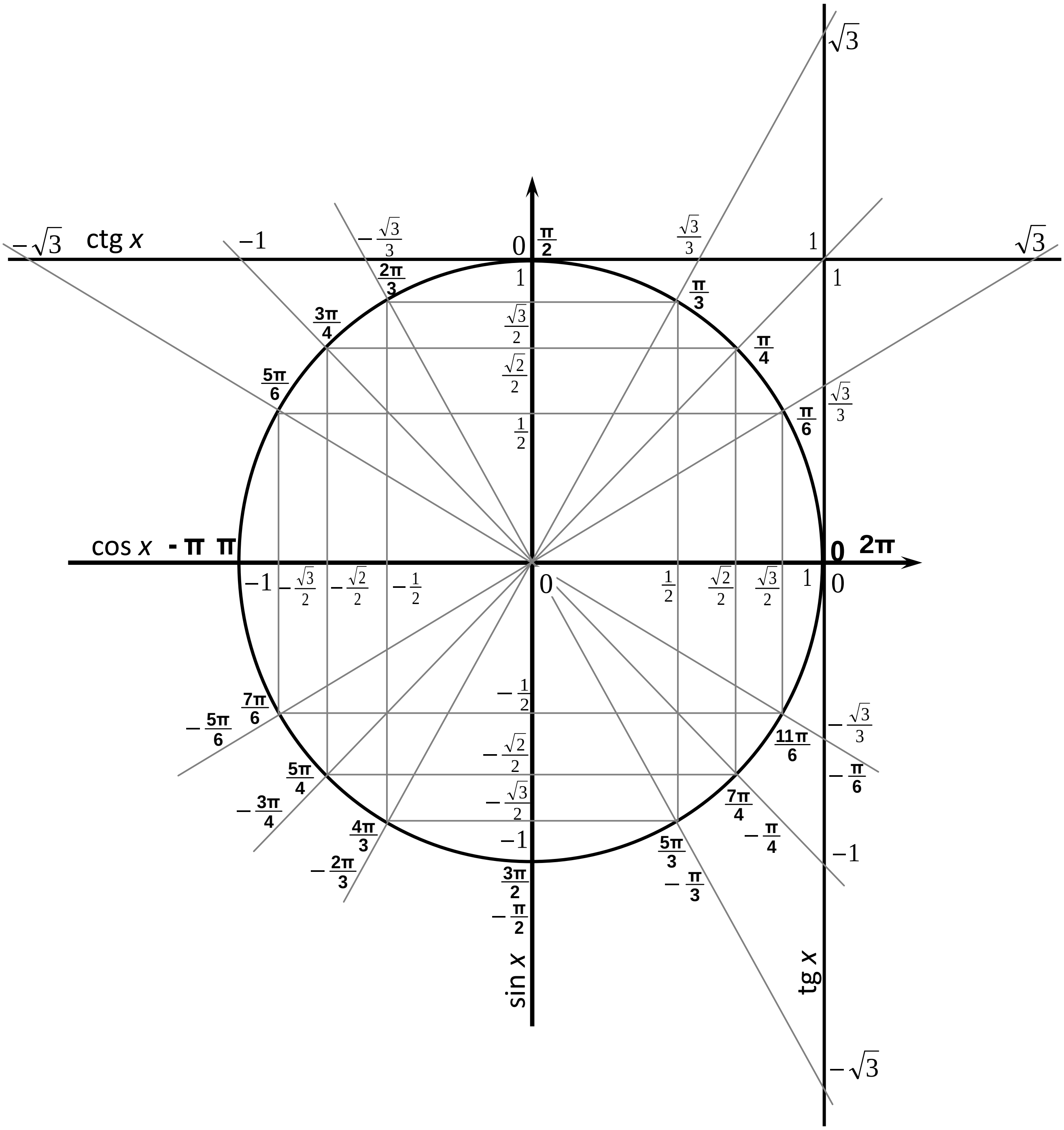
Сумму всех членов *бесконечной геометрической прогрессии* со знаменателем $|q| < 1$ и первым членом b_1 находят по формуле: $S_n = \frac{b_1}{1-q}$.

Тригонометрия

Тригонометрическая окружность

На окружности единичного радиуса, центр которой совпадает с началом координат, нанесены числа – аргументы тригонометрических функций, им в соответствие ставятся проекции на оси Ox ($\cos x$) и Oy ($\sin x$), а также проекции на оси тангенсов и котангенсов, получаемые при центральном проектировании.

Тригонометрическую окружность используют при нахождении значений тригонометрических функций, обратных тригонометрических функций, решении простейших тригонометрических уравнений и неравенств.



Тождества связи функций одного аргумента[1]

При преобразованиях выражений часто употребляют тождества:

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$,
- $1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$,
- $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$,
- $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \frac{2}{\sin 2x}$,
- $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1$,
- $1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$,
- $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$,
- $\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x = 2 \operatorname{ctg} 2x$,

[1] Здесь и далее: тождества справедливы на области их допустимых значений: $\sin x$ и $\cos x$ существуют для всех действительных значений аргумента, $\operatorname{tg} x$ для $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $\operatorname{ctg} x$ для $x \neq \pi n, n \in Z$.

- $\cos^2 x = \frac{\operatorname{ctg}^2 x}{1+\operatorname{ctg}^2 x}$,
- $\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$,
- $\cos x \pm \sin x = \sqrt{2}\sin\left(x \pm \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(x \mp \frac{\pi}{4}\right)$.

Преобразуя эти формулы, заполним таблицу связи между функциями одного аргумента, в которой знаки перед радикалами согласуются со знаками вычисляемых функций.

Таблица связи между функциями одного аргумента

	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$
$\sin x$		$\pm\sqrt{1-\cos^2 x}$	$\pm\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 x}}$
$\cos x$	$\pm\sqrt{1-\sin^2 x}$		$\pm\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}$	$\pm\frac{\operatorname{ctg} x}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 x}}$
$\operatorname{tg} x$	$\pm\frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$	$\pm\frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$		$\frac{1}{\operatorname{ctg} x}$
$\operatorname{ctg} x$	$\pm\frac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin x}$	$\pm\frac{\cos x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$	$\frac{1}{\operatorname{tg} x}$	

Формулы сложения аргументов

- $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$,
- $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$,
- $\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}$,
- $\operatorname{ctg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg} y \mp 1}{\operatorname{ctg} x \pm \operatorname{ctg} y}$.

Формулы кратных аргументов

- $\sin 2x = 2\sin x \cos x$,
- $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$,
- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$,
- $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$,
- $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$,
- $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$,
- $\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$,
- $\operatorname{ctg} 2x = \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2\operatorname{ctg} x}$,
- $\sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$,
- $\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$,
- $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$,
- $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$,
- $\operatorname{tg} 3x = \frac{3\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1-3\operatorname{tg}^2 x}$,
- $\operatorname{ctg} 3x = \frac{\operatorname{ctg}^3 x - 3\operatorname{ctg} x}{3\operatorname{ctg}^2 x - 1}$,
- $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin 2x$,
- $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = \frac{\sin x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}$.

Формулы преобразования суммы в произведение

- $\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$,
- $\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$,
- $\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$,
- $\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$,
- $\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x\pm y)}{\cos x\cos y}$,
- $\operatorname{ctg} x \pm \operatorname{ctg} y = \frac{\sin(y\pm x)}{\sin x\sin y}$.

Формулы преобразования произведения в сумму

- $\sin x\cos y = \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y))$,
- $\sin x\sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$,
- $\cos x\cos y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$.

Универсальная тригонометрическая подстановка

Часто при рассмотрении тригонометрических уравнений и неравенств бывает удобным сводить их к решению дробно-рациональных уравнений и неравенств с помощью *универсальной тригонометрической подстановки* $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Тогда $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\operatorname{tg} x = \frac{2t}{1-t^2}$.

Введение вспомогательного угла

Для преобразования выражений вида $a\cos x \pm b\sin x$ используют так называемый метод введения вспомогательного угла

$$\varphi = \arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

основываясь на формулах:

- $a\cos x \pm b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x\pm\varphi)$,
- $a\sin x \pm b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x\pm\varphi)$.

Основные соотношения для обратных функций

При преобразовании выражений с обратными тригонометрическими функциями бывает полезно использовать формулы ($n \in Z$):

- $\sin(\arcsin a) = a$,
- $\cos(\arccos a) = a$,
- $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a$,
- $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} a) = a$,
- $\arcsin(\sin x) = (-1)^n x + \pi n$,
- $\arccos(\cos x) = \pm x + 2\pi n$,
- $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x + \pi n$,
- $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x + \pi n$.

Простейшие тригонометрические уравнения

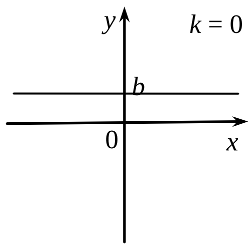
При рассмотрении тригонометрических уравнений тем или иным способом решение сводят к простейшим уравнениям, которые в общем случае решаются по формулам:

- $\sin x = a$ $(|a| \leq 1)$, $\quad x_1 = \arcsin a + 2\pi n, \mathrm{n} \in \mathrm{Z},$
  $x_2 = \pi - \arcsin a + 2\pi n, \mathrm{n} \in \mathrm{Z},$
  $x_{1,2} = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \mathrm{n} \in \mathrm{Z},$
- $\cos x = a$ $(|a| \leq 1)$, $\quad x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in Z,$
- $\mathrm{tg}\, x = a,$ $\quad x = \mathrm{arctg}\, a + \pi n, n \in Z,$
- $\mathrm{ctg}\, x = a,$ $\quad x = \mathrm{arcctg}\, a + \pi n, n \in Z.$

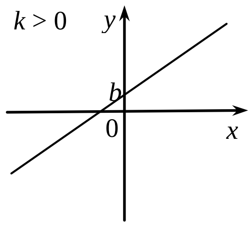
Начала математического анализа

Основные элементарные функции и их графики

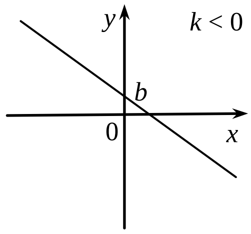
Линейная функция



Функция $y = kx + b$, где k и b – некоторые действительные числа, а x – переменная, называется *линейной*.



Область определения линейной функции – все действительные числа, область значений при $k = 0$ состоит из одного числа b, при $k \neq 0$ – все действительные числа. При $k > 0$ функция возрастает, при $k < 0$ – убывает, при $k = 0$ является постоянной. Графиком линейной функции является прямая, для ее построения достаточно двух точек.



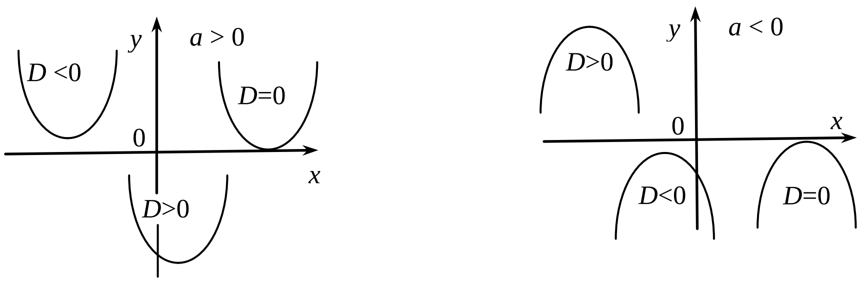
По уравнениям линейных функций $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ можно судить о расположении их графиков. Если $k_1 = k_2$, то прямые параллельны; если $k_1k_2 = -1$ – перпендикулярны. Угол φ между прямыми можно найти по формуле: $\mathrm{tg}\, \varphi = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2}$.

Квадратичная функция

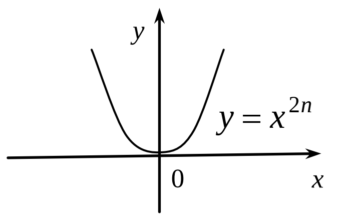
Функция $y = ax^2 + bx + c$, где a $(a \neq 0), b$ и c – действительные числа и x – переменная, называется *квадратичной*.

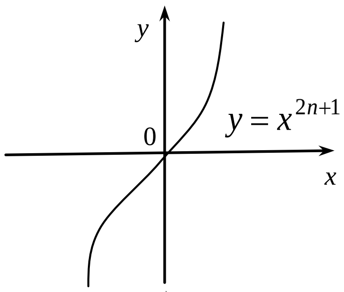
Областью определения квадратичной функции является множество действительных чисел. Графиком квадратичной функции является парабола, ветви которой при $a > 0$ направлены вверх, а при $a < 0$ – вниз. Вершина параболы находится в точке $(x_0;\, y_0)$, где $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$.

Положение параболы относительно оси Ox зависит от дискриминанта, что показано на рисунке.



Степенные функции

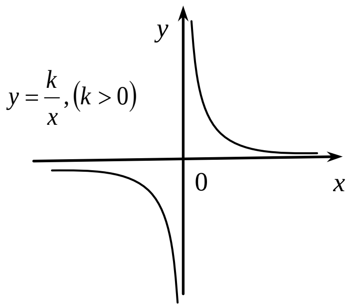


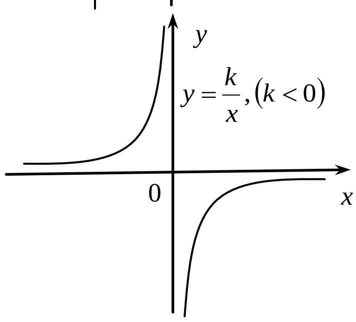


- Функции вида $y = x^{2n}$, $y = x^{2n+1}$, где $n \in N$.

Область определения этих функций – все действительные числа, область значения функции $y = x^{2n}$ – множество всех неотрицательных чисел, $y = x^{2n+1}$ – все действительные числа. Функция $y = x^{2n+1}$ возрастает на всей области определения, а $y = x^{2n}$ на промежутке $(-\infty; 0]$ убывает и на промежутке $[0; +\infty)$ возрастает. Функция $y = x^{2n}$ является четной, ее график симметричен относительно оси Oy, функция $y = x^{2n+1}$ является нечетной, ее график симметричен относительно начала координат.

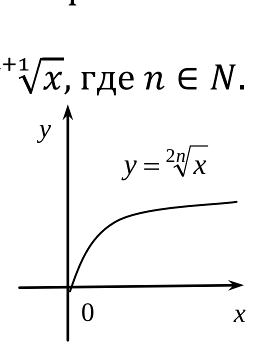
- Функция $y = \frac{k}{x}$.

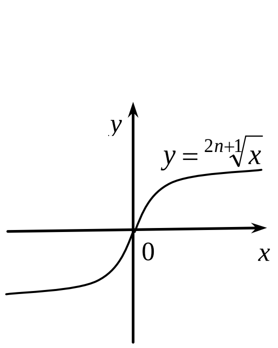




Области определения и значений – все действительные числа, кроме нуля. Функция на каждом из двух промежутков области определения убывает при $k > 0$ и возрастает при $k < 0$. График функции называется гиперболой. Функция нечетная, график симметричен относительно начала координат.

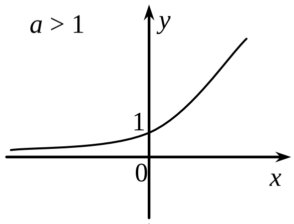
- Функции вида $y = \sqrt[2n]{x}$ и $y = \sqrt[2n+1]{x}$, где $n \in N$.

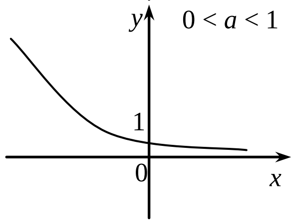




Область определения и область значений функции $y = \sqrt[2n+1]{x}$ – все действительные числа, а функции $y = \sqrt[2n]{x}$ – множество всех неотрицательных чисел. Обе функции возрастают на своей области определения. Функция $y = \sqrt[2n+1]{x}$ является нечетной, ее график симметричен относительно начала координат.

Показательная функция





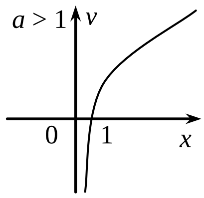
Функция $y = a^x$, где a – положительное число, не равное 1, называется *показательной*.

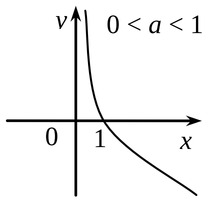
Областью определения показательной функции является множество всех действительных чисел, областью значений – множество всех положительных действительных чисел. Так как $a^0 = 1$, то график показательной функции проходит через точку $(0; 1)$; функция монотонно возрастает при $a > 1$ и монотонно убывает при $0 < a < 1$.

При решении показательных уравнений и неравенств пользуются свойством монотонности показательной функции:

- $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$,
- $a^x > a^y \Leftrightarrow x > y \ (a > 1)$,
- $a^x > a^y \Leftrightarrow x < y \ (0 < a < 1)$.

Логарифмическая функция





Функция $y = \log_a x$, где a – положительное число, не равное 1, называется *логарифмической*.

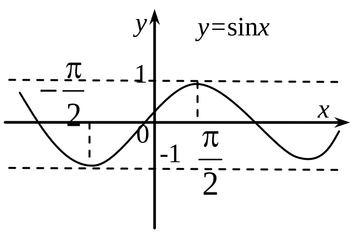
Областью определения логарифмической функции является множество всех положительных действительных чисел, областью значений – множество всех действительных чисел. Так как $\log_a 1 = 0$, то график показательной функции проходит через точку $(1; 0)$; монотонно возрастает при $a > 1$ и монотонно убывает при $0 < a < 1$.

При решении логарифмических уравнений и неравенств пользуются свойством монотонности функции $(x > 0, y > 0)$:

- $\log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y$,
- $\log_a x > \log_a y \Leftrightarrow x > y \ (a > 1)$,
- $\log_a x > \log_a y \Leftrightarrow x < y \ (0 < a < 1)$.

Тригонометрические функции

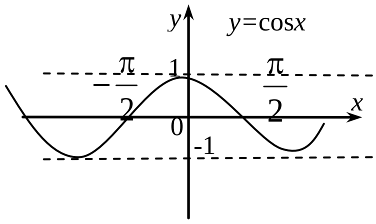
- Функция $y = \sin x$.



Областью определения является множество всех действительных чисел, областью значений – промежуток $[-1; 1]$. Функция возрастает на $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$, убывает на $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$. Функция является нечетной, график симметричен относительно начала координат.

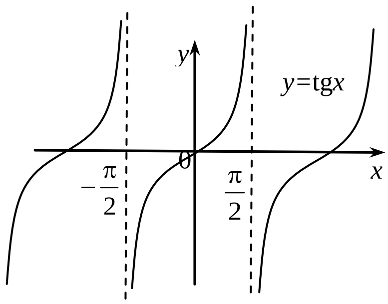
- Функция $y = \cos x$.

Областью определения является множество всех действительных чисел, областью значений – промежуток $[-1; 1]$. Функция возрастает на $[\pi + 2\pi n; 2\pi n]$, $n \in Z$, убывает на $[2\pi n; \pi + 2\pi n]$, $n \in Z$. Функция является четной, график симметричен относительно оси Oy.



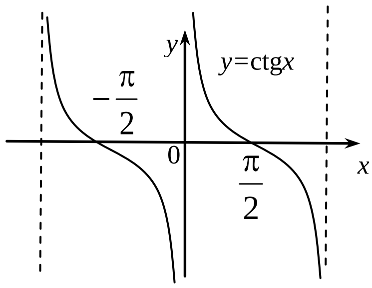
- Функция $y = \operatorname{tg} x$.

Областью определения является множество всех действительных чисел, кроме точек вида $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$, областью значений – множество всех действительных чисел. Функция возрастает на каждом промежутке области определения. Функция является нечетной, график симметричен относительно начала координат.



- Функция $y = \operatorname{ctg} x$.

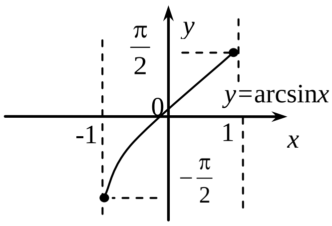
Областью определения является множество всех действительных чисел, кроме точек вида πn, $n \in Z$, областью значений – множество всех действительных чисел. Функция убывает на каждом промежутке области определения. Функция является нечетной, график симметричен относительно начала координат.



Обратные тригонометрические функции

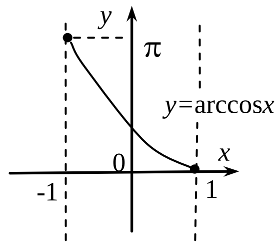
- Функция $y = \arcsin x$.

Область определения – промежуток $[-1; 1]$, область значений – промежуток $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Функция возрастает на всей области определения. Функция является нечетной, график симметричен относительно начала координат.



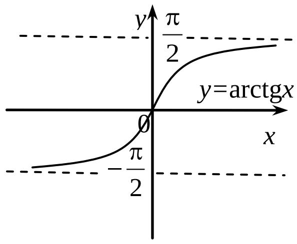
- Функция $y = \arccos x$.

Область определения – промежуток $[-1; 1]$, область значений – промежуток $[0; \pi]$. Функция убывает на всей области определения.

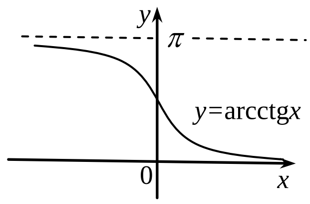


- Функция $y = \operatorname{arctg} x$.

Область определения – множество всех действительных чисел, область значений – промежуток $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Функция возрастает на всей области определения. Функция является нечетной, график симметричен относительно начала координат.

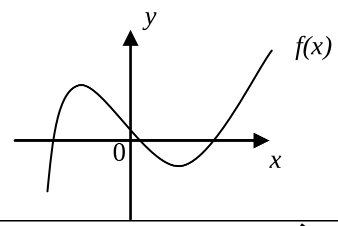
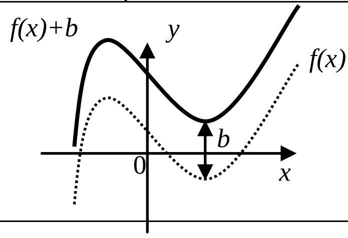
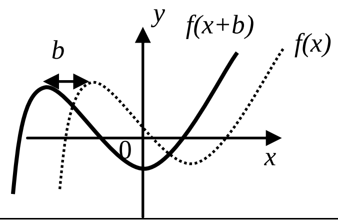
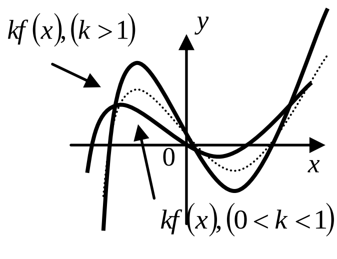
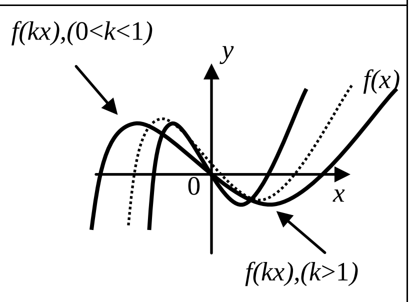
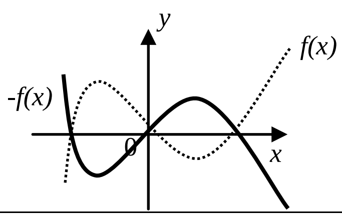


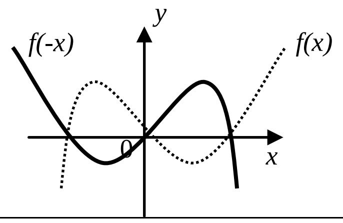
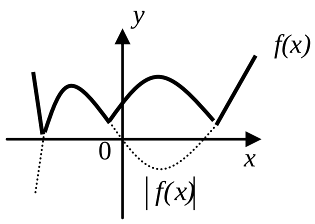
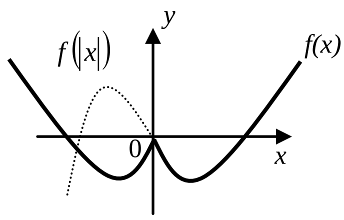
- Функция $y = \operatorname{arcctg} x$.



Область определения – множество всех действительных чисел, область значений – промежуток $(0;\, \pi)$. Функция убывает на всей области определения.

Основные приемы преобразования графиков

$y = f(x)$	Пусть дан график функции $y = f(x)$	
$y = f(x) + b$	Перенос графика $y{=}f(x)$ на вектор $\vec{a}\ (0; b)$	
$y = f(x + b)$	Перенос графика $y = f(x)$ на вектор $\vec{a}\ (-b; 0)$	
$y = kf(x)$, $k > 0$	При $k > 1$ растяжение от ки $(0; 0)$ вдоль оси ординат в k раз; при $0 < k < 1$ сжатие к точке $(0; 0)$ вдоль оси ординат в $\frac{1}{k}$ раз	
$y = f(kx)$, $k > 0$	При $k > 1$ сжатие к точке $(0; 0)$ вдоль оси абсцисс в k раз; при $0 < k < 1$ растяжение от точки $(0; 0)$ вдоль оси абсцисс в $\frac{1}{k}$ раз	
$y = -f(x)$	Отображение симметрично относительно оси абсцисс	

$y=f(-x)$	Отображение симметрично относительно оси ординат	
$y=\lvert f(x)\rvert$	Часть графика в верхней полуплоскости и на оси абсцисс без изменения, а вместо части графика в нижней полуплоскости строим симметричную ей относительно оси Ox	
$y=f(\lvert x\rvert)$	Часть графика в правой полуплоскости и на оси ординат без изменения, а вместо части в левой полуплоскости строим симметричную правой относительно оси Oy	

Производная функции

Производной функции $y=f(x)$ *в точке* x_0 называется число $f'(x_0)$ равное $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

Таблица производных основных элементарных функций

Формула	***Ограничения***		***Формула***	***Ограничения***
$(c)'=0$	$c\in R$		$(\cos x)'=-\sin x$	$x\in R$
$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$	$\alpha\in N, x\in R$ или $-\alpha\in N, x\neq 0$, или $\alpha\notin Z, x>0$		$(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$	$x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$
$(a^x)'=a^x\ln a$	$x\in R$		$(\operatorname{ctg} x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$	$x\neq\pi n, n\in Z$
$(e^x)'=e^x$	$x\in R$		$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-1<x<1$
$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$	$x>0$		$(\arccos x)'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-1<x<1$
$(\ln x)'=\frac{1}{x}$	$x>0$		$(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{1+x^2}$	$x\in R$
$(\sin x)'=\cos x$	$x\in R$		$(\operatorname{arcctg} x)'=\frac{-1}{1+x^2}$	$x\in R$

Правила дифференцирования

Для непрерывных, определенных и дифференцируемых на интервале функций f и g справедливы правила дифференцирования:

- $(C \cdot f)' = C \cdot f'$, где $C \in R$ – константу (постоянный множитель) можно выносить за знак производной;
- $(f + g)' = f' + g'$ – производная суммы равна сумме производных;
- $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ – производная произведения равна сумме произведений производной одной функции на другую;
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$ – производная частного;
- $f([g(x)]) = f'[g(x)] \cdot g'(x)$ – производная сложной функции равна произведению производной внутренней функции на производную внешней.

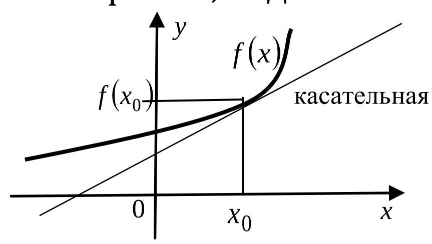
Физический смысл производной

Пусть $s(t)$ – зависимость пути от времени, тогда $v(t) = s'(t)$ (скорость есть производная пути по времени) и $a(t) = v'(t) = s''(t)$ (ускорение есть производная скорости по времени).

Уравнение касательной. Геометрический смысл производной

Пусть в системе координат изображен график некоторой функции $y = f(x)$. Касательная к нему в точке x_0 есть прямая, задаваемая уравнением:

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0).$$



Геометрический смысл производной заключается в том, что значение производной функции в точке равно тангенсу угла наклона касательной к графику функции в этой точке.

Первообразная функции и интеграл

Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$, если $F'(x) = f(x)$. Множество всех первообразных $F(x) + C$ функции для $f(x)$, где C – произвольная константа, называется *интегралом* от функции $f(x)$ и обозначается $\int f(x)dx = f'(x) + C$.

Три правила нахождения первообразных

- Если F есть первообразная для f, а G – первообразная для g, то $F + G$ есть первообразная для $f + g$.
- Если F есть первообразная для f, а k – постоянная, то функция kF – первообразная для kf.
- Если $F(x)$ есть первообразная для $f(x)$, а k и b – постоянные, причем $k \neq 0$, то $\frac{1}{k}F(kx + b)$ есть первообразная для $f(kx + b)$.

Таблица первообразных

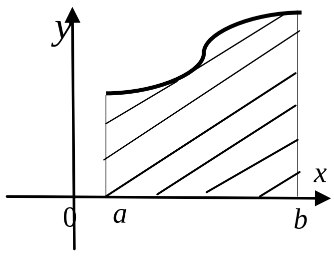
$f(x)$	$F(x)$	***Ограничения***
$\boldsymbol{k}$	$kx + C$	$x \in R$
$\boldsymbol{x^{\alpha}}$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$\alpha \in N, x \in R$ или $-\alpha \in N,\ \alpha \neq 1, x \neq 0,$ или $\alpha \notin Z, x > 0$
$\boldsymbol{\frac{1}{x}}$	$\ln\lvert x\rvert + C$	$x \in R$
$\boldsymbol{e^{x}}$	$e^{x} + C$	$x \in R$
$\boldsymbol{a^{x}}$	$\frac{a^{x}}{\ln a} + C$	$x \in R$
$\boldsymbol{\cos x}$	$\sin x + C$	$x \in R$
$\boldsymbol{\sin x}$	$-\cos x + C$	$x \in R$
$\boldsymbol{\frac{1}{\cos^2 x}}$	$\operatorname{tg} x + C$	$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in Z$
$\boldsymbol{\frac{1}{\sin^2 x}}$	$-\operatorname{ctg} x + C$	$(\pi n;\ \pi + \pi n), n \in Z$

Определенный интеграл

Если $F(x)$ – произвольная непрерывная первообразная функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, то *определенным интегралом* $\int_a^b f(x)dx$ от функции $f(x)$ вдоль отрезка $[a;b]$ называется число, равное разности $F(b) - F(a)$.

Площадь криволинейной трапеции

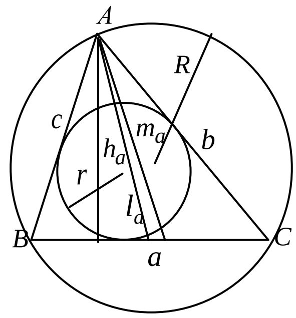
Фигура, ограниченная графиком непрерывной и неотрицательной на отрезке $[a;b]$ функции $f(x)$ и прямыми $y = 0,\ x = a,\ x = b$ называется криволинейной трапецией. Площадь криволинейной трапеции можно вычислить по формуле $S = \int_a^b f(x)dx$.



Основные метрические соотношения планиметрии

Треугольник

Введем для треугольника ABC обозначения: $a = BC,\ b = AC,\ c = AB,\ m_a, l_a, h_a$ – медиана, биссектриса и высота соответственно, проведенные к стороне a, P – периметр, p – полупериметр, S – площадь треугольника, R и r – радиусы соответственно описанной и вписанной окружностей.



Для треугольника ABC справедливы соотношения для нахождения его площади:

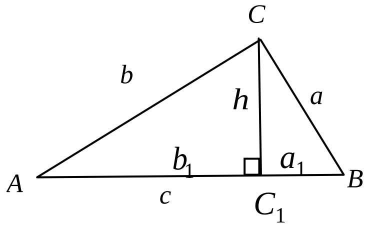
- $S = \frac{1}{2} a h_a$,
- $S = \frac{1}{2} ab \sin C$,
- $S = pr$,
- $S = \frac{abc}{4R}$,
- $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$,
- $S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}$,
- $S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$.

В *произвольном треугольнике* имеют место соотношения:

- $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ – теорема синусов;
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ – теорема косинусов;
- $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$ – длина медианы;
- $h_a = \frac{2S}{a}$ – длина высоты;
- $l_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}$ – длина биссектрисы.

В *правильном треугольнике* со стороной a можно использовать формулы:

- $S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^3$,
- $R = \frac{\sqrt{3}}{3} a$,
- $r = \frac{\sqrt{3}}{6}$.



В *прямоугольном треугольнике* с катетами a, b, гипотенузой c и высотой h, проведенной к гипотенузе и делящей ее на отрезки a_1 и b_1, справедливы соотношения:

- $a^2 = a_1 c$,
- $b^2 = b_1 c$,
- $h^2 = a_1 b_1$,
- $hc = ab$.

Теорема Пифагора. В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов: $c^2 = a^2 + b^2$.

Правильные многоугольники

Для *правильного n-угольника* со стороной a_n, радиусом описанной окружности R, радиусом вписанной окружности r, периметром P и площадью S справедливы формулы:

- $a_n = 2R \sin \frac{180°}{n}$,
- $a_n = 2r \operatorname{tg} \frac{180°}{n}$,
- $S = \frac{1}{2} n r a_n = \frac{1}{2} Pr$.

Четырехугольники

Отметим некоторые факты, касающиеся четырехугольников:

- сумма противоположных углов вписанного в окружность четырехугольника равна 180°;
- суммы противоположных сторон описанного около окружности четырехугольника равны;

• сумма квадратов длин диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов длин его сторон.

Площади четырехугольников могут быть найдены по формулам:

Фигура	***Площадь***	***Обозначения***
Квадрат	$S = a^2$	a – сторона
Прямоуголь-ник	$S = ab$	a, b – стороны
Параллело-грамм	$S = ab\sin\alpha = ah_a$	α – угол между сторонами a и b, h_a – высота к стороне a
Ромб	$S = a^2\sin\alpha = \frac{1}{2}d_1d_2$	a – сторона, α – острый угол между сторонами, d_1, d_2 – диагонали
Трапеция	$S = \frac{1}{2}(a+b)h$	a, b – основания, h – высота
Выпуклый четырех-угольник	$S = \dfrac{1}{2}d_1d_2\sin\alpha$	α – угол между диагоналями d_1, d_2

Окружность

- Длина окружности радиуса R: $C = 2\pi R$.
- Площадь круга радиуса R: $S = \pi R^2$.
- Длина дуги в α градусов или t радиан: $l = \frac{\pi R\alpha}{180°} = tR$.
- Площадь сектора с дугой в α градусов или t радиан:

$$S = \frac{\pi R^2\alpha}{360°} = \frac{1}{2}tR^2.$$

• Радиус вписанного круга в треугольник со сторонами a, b, c и полупериметром p:

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}, r = (p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2} = (p-b)\operatorname{tg}\frac{B}{2} = (p-c)\operatorname{tg}\frac{C}{2}.$$

• Радиус описанного круга около треугольника со сторонами a, b, c и площадью S: $R = \frac{abc}{4S}$.

Объемы и поверхности тел

Обозначения: h – высота; P – периметр или окружность основания; S – площадь основания; $S_\perp$ – площадь перпендикулярного сечения; $P_\perp$– периметр перпендикулярного сечения; A – апофема правильной пирамиды и правильной усеченной пирамиды; l – образующая конуса или цилиндра (апофема пирамиды); S_1, S_2 – площади оснований усеченных пирамиды и конуса, P_1, P_2 – периметры оснований усеченных пирамиды и конуса; R_1, R_2 – радиусы оснований усеченного конуса; R – радиус шара или основания конуса.

Тело	***Объем***	***Площадь боковой поверхности***	***Площадь полной поверхности***
Прямая призма	Sh	Ph	$Ph + 2S$
Наклонная призма	$S_{\perp}h$	$P_{\perp}l$	$P_{\perp}l + 2S$
Правильная пирамида	$\frac{1}{3}Sh$	$\frac{1}{2}PA$	$\frac{1}{2}PA + S$
Пирамида	$\frac{1}{3}Sh$	есть сумма площадей боковых граней	есть сумма площадей боковых граней и площади основания
Усеченная пирамида	$\frac{1}{3}\left(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2\right)h$	$A(P_1 + P_2)$	$A(P_1 + P_2) +$ $+S_1 + S_2$
Цилиндр	$Sh = \pi R^2 h$	$2\pi Rh = 2\pi Rl$	$2\pi Rh + 2\pi R^2$
Конус	$\frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}\pi R^2 h$	$\frac{1}{2}Pl = \pi Rl$	$\pi R(l + R)$
Усеченный конус	$\frac{1}{3}\pi h(R_1^2 + R_1R_2 + R_2^2)$	$\pi(R_1 + R_2)l$	$\pi(R_1 + R_2)l +$ $+S_1 + S_2$
Шар	$\frac{4}{3}\pi R^3$		$4\pi R^2$
Шаровой сегмент	$\pi h^2(R - \frac{1}{3}h)$		$2\pi Rh$
Шаровой слой	$\frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}\pi h(R_1^2 +$ $R_2^2)$		$2\pi Rh$
Шаровой сектор	$\frac{2}{3}\pi R^2 h,$ h – высота сегмента		$\pi R\big(2h +$ $+\sqrt{2Rh - h^2}\big)$

Метод координат на плоскости

В прямоугольной декартовой системе координат Oxy:

- расстояние между точками $A_1(x_1;\ y_1)$ и $A_2(x_2;\ y_2)$ находят по формуле: $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$;
- $x = \frac{x_1 + \alpha x_2}{1+\alpha}$, $y = \frac{y_1 + \alpha y_2}{1+\alpha}$ – координаты точки $A\ (x; y)$, делящей отрезок A_1A_2 в отношении $A_1A : AA_2 = \alpha, \alpha > 0$;
- $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$ – длина вектора $\vec{a}\ (a_x;\ a_y)$;
- $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ – уравнение окружности радиуса R с центром $M_0(x_0;\ y_0)$;
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\alpha = a_x b_x + a_y b_y$ – скалярное произведение векторов $\vec{a}\ (a_x;\ a_y)$, $\vec{b}\ (b_x;\ b_y)$, угол между которыми равен α.

Комбинаторика и вероятность

Основные комбинаторные схемы и формулы

Задачи *бесформульной комбинаторики* базируются на использовании двух правил:

- *правило комбинаторного умножения*: если первый элемент можно выбрать n способами, после чего второй элемент – k способами, то выбрать первый и второй элементы можно $n \cdot k$ способами;
- *правило комбинаторного сложения*: если первый элемент можно выбрать n способами, после чего второй элемент – k способами, то выбрать первый или второй элементы можно $n + k$ способами.

Для решения задач по формулам необходимо определить, по какой комбинаторной схеме она решается. Для этого требуется ответить на ряд вопросов.

- *Важно ли, в каком порядке выбираются элементы*?

  Если порядок имеет значение, то выбираются схемы перестановок или размещений; если не важен – сочетаний.

- *Могут ли при выборе элементы повторяться (выбирать один и тот же элемент несколько раз; брать одинаковые элементы и т. п.)?*

  Если элементы все разные, то выбирается схема «без повторений», а если есть возможность повторять элементы – «с повторениями».

- *Все ли имеющиеся элементы используются при выборе?*

  Если используются все элементы, то выбирается схема перестановок, если только часть имеющихся элементов – схема размещений.

Для удобства использования формул они представлены в таблице.

Напомним, что $n!$ обозначает произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно и называется *факториалом* числа n (по определению $0! = 1$).

<table>
<tr><th></th><th>Порядок имеет значение</th><th>Порядок не имеет значения</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Повторений элементов нет</td><td>Схема: все имеющиеся n элементов выложены в один ряд. Сколько существует способов поменять их местами?

Перестановки n элементов
$P_n = n!$</td><td rowspan="2">Схема: имеется n элементов, из них выбирают k элементов. Сколько существует способов сделать это?

Сочетания n элементов группами по k элементов
$C_n^k = \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$</td></tr>
<tr><td>Схема: имеется n элементов, из них выбирают k элементов и выкладывают в один ряд. Сколько существует способов сделать это?

Размещения n элементов группами по k элементов
$A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Повторения элементов есть</td><td>Схема: все имеющиеся n элементов, среди которых k_1 элемент 1-го типа, k_2 элемента 2-го типа, …, k_p элементов типа p, выложены в один ряд. Сколько существует способов поменять их местами?

Перестановки n элементов с повторениями
$\tilde{P}_n = \dfrac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_p!}$</td><td rowspan="2">Схема: имеется n типов элементов, выбирают k элементов (быть может, одного типа). Сколько существует способов сделать это?

Сочетания n элементов группами по k элементов с повторениями
$\tilde{C}_n^k = \dfrac{(n+k-1)!}{k! \cdot (n-1)!}$</td></tr>
<tr><td>Схема: имеется n типов элементов, выбирают k элементов (быть может, одного типа) и выкладывают в один ряд. Сколько существует способов сделать это?

Размещения n элементов группами по k элементов с повторениями
$\tilde{A}_n^k = n^k$</td></tr>
</table>

Вероятность случайного события

Вероятностью случайного события A называют число, равное отношению количества благоприятных исходов (k) эксперимента к общему количеству возможных его исходов (n):

$$P(A) = \frac{k}{n}.$$

Суммой двух событий A и B называют событие, которое имеет место, если происходит хотя бы одно из событий A или B.

Произведением двух событий A и B называют событие, которое имеет место, если происходят оба события: и A, и B.

Два события называются *совместными*, если они могут произойти одновременно; в противном случае они называются *несовместными*.

Два события называются *независимыми*, если факт свершения одного из них никак не влияет на возможность появления другого; в противном случае события называются *зависимыми*.

Справедливы следующие формулы:

- для независимых событий: $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$;
- для зависимых событий: $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B)$, где $P_A(B)$ – вероятность события B, при условии, что событие A уже произошло;
- для несовместных событий: $P(A + B) = P(A) + P(B)$;
- для совместных событий: $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$.

Раздел второй
Сборник заданий к занятиям по подготовке к ЕГЭ

Учебная программа, содержание которой изложено в пособии, представляет собой систему повторения школьного курса математики на этапе подготовки к сдаче выпускного экзамена. Необходимый для повторения материал представлен в систематизированном виде, выделены основные узловые вопросы школьной программы по математике, предназначенные для повторения. В содержание курса включены основные ключевые темы школьного курса математики, входящие в материалы выпускного экзамена. Обозначены основные содержательные линии: текстовые задачи, планиметрия, основы тригонометрии, корни, степени и логарифмы, функции и производные, уравнения и неравенства, стереометрия, комбинаторика и вероятность.

Весь учебный материал разбит на восемь тематических блоков, содержащих по четыре занятия каждый. Занятия представлены аудиторной и самостоятельной работами.

Следует отметить методический подход, реализованный в опытном преподавании при работе с пособием: аудиторная работа с проверкой или фронтальным решением задач и самостоятельная работа учащихся по заданиям той же тематики, но уровня незначительно продвинутого по сравнению с разобранным в аудитории. Это позволяет учащимся более осмысленно подходить к процессу решения задач: из «натаскивания» процесс обучения переходит в ранг «научения».

По результатам самостоятельной работы каждый ученик получает индивидуальное домашнее задание, направленное на отработку тех заданий, которые вызвали наибольшие затруднения.

Цель подготовки – овладение учащимися необходимым количеством знаний и умений, которое соответствует требованиям государственного образовательного стандарта, достаточным для получения положительной оценки по предмету.

В результате подготовки учащийся должен:

– знать основной теоретический материал, необходимый для решения заданий выпускного экзамена;

– вычислять значения числовых и буквенных выражений, осуществляя необходимые подстановки и преобразования;

– выполнять арифметические действия, сочетая устные и письменные приемы; находить значения корня натуральной степени, степени с рациональным показателем, логарифма;

– проводить по известным формулам и правилам преобразования буквенных выражений, включающих степени, радикалы, логарифмы и тригонометрические функции;

– определять значение функции по значению аргумента при различных способах задания функции;

– строить графики изученных функций; описывать по графику поведение и свойства функций, находить по графику функции наибольшие и наименьшие значения;

– решать уравнения, простейшие системы уравнений, используя графики функций;

– вычислять производные и первообразные функций;

– исследовать в простейших случаях функции на монотонность, находить наибольшие и наименьшие значения функций, строить графики многочленов с использованием аппарата математического анализа;

– решать рациональные, показательные и логарифмические уравнения и неравенства, простейшие иррациональные и тригонометрические уравнения, их системы;

– уметь использовать правила комбинаторного умножения и сложения; определять заложенную в задаче комбинаторную схему;

– находить вероятность события в классической трактовке;

– анализировать в простейших случаях взаимное расположение объектов в пространстве;

– изображать основные многогранники и круглые тела; выполнять чертежи по условиям задач;

– решать планиметрические и простейшие стереометрические задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей, объемов);

– использовать при решении стереометрических задач планиметрические факты и методы;

– проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач.

Курс рассчитан на 64 часа. Каждое занятие длится по 2 часа.

Тема 1. Текстовые задачи (8 ч). *Задания на вычисления. Задания на анализ практической ситуации. Задачи на анализ практической ситуации, приводящей к решению неравенства или уравнения. Текстовые задачи на движение, работу, проценты, концентрацию, части, доли. Основные приемы при решении текстовых задач.*

Задания типа B1 моделируют реальную или близкую к реальной ситуацию. Для решения таких задач достаточно уметь выполнять арифметические действия, делать прикидку и оценку, знать, что процент – это одна сотая часть числа. Задания типа B4 описывают простые жизненные ситуации, связанные с выбором тарифных планов, заказом и доставкой товаров, выбором наиболее короткого пути. Требуется лишь определенная вычислительная культура, устойчивые навыки вычислений в целых числах, умение пользоваться процентами, а также сравнивать числа и делать обоснованный выбор. Задания типа B12 моделируют физические, химические и другие процессы. Задания типа B13 – традиционные «текстовые» задачи, то есть задачи на составление уравнений. Умение решать такие задачи является базовым: без него невозможно продвинуться в решении более сложных задач.

Тема 2. Планиметрия (8 ч). *Задания на вычисление элементов прямоугольного треугольника, вычисление площади плоской фигуры. Задачи в координатах, применение векторов к решению задач*.

Задачи на вычисление элементов прямоугольного треугольника связаны с определениями тригонометрических функций острых углов прямоугольного треугольника, в том числе по готовому чертежу. Задачи на нахождение площадей плоских фигур нарисованы на клетчатой бумаге или расположены на координатной плоскости. Наличие рисунков помогает лучше понять условия задач, представить соответствующую геометрическую ситуацию, наметить план решения, при необходимости провести дополнительные построения и вычисления. Для решения предлагаемых задач требуются знания формул площадей треугольников, параллелограммов, трапеций, круга и его частей, умения применять эти формулы для нахождения площадей фигур, находить площадь фигуры методом разбиения ее на более простые фигуры.

Тема 3. Основы тригонометрии (8 ч). *Преобразование тригонометрических выражений (понятие тригонометрической функции, числового аргумента, соотношения между тригонометрическими функциями одного аргумента, формулы приведения, формулы сложения и их следствия). Основные тригонометрические уравнения. Методы решения тригонометрических уравнений. Решение тригонометрических уравнений*.

На уроках по тригонометрии важно напомнить учащимся формулы сложения аргументов, формулы двойного и половинного аргумента, формулы для преобразования суммы в произведение и произведения в сумму. Учащиеся должны знать простейшие тригонометрические уравнения. Рассмотреть решение основных тригонометрических уравнений.

Тема 4. Корни. Степени. Логарифмы (8 ч). *Преобразование выражений, содержащих корни. Основные методы решения иррациональных уравнений (возведение обеих частей уравнения в одну и ту же степень, метод введения новых переменных). Преобразование выражений, содержащих степени. Основные свойства степеней. Методы решения показательных уравнений (использование свойств монотонности показательной функции, введение новой переменной, разложение на множители). Решение показательных уравнений. Преобразование выражений, содержащих логарифмы. Понятие логарифма, свойства логарифма, основное логарифмическое тождество. Методы решения логарифмических уравнений (метод потенцирования и логарифмирования, введение новой переменной, разложение на множители). Решение логарифмических уравнений*.

Следует повторить основные методы решения иррациональных уравнений, свойства степеней и логарифмов. Важно научить школьников первым делом выписывать ОДЗ при решении логарифмических уравнений и неравенств. Рассмотреть основные методы решения показательных и логарифмических уравнений.

Тема 5. Функции. Производные (8 ч). *Чтение графика функции. Производная. Исследование функций с помощью производной*.

Задачи типа В2 моделируют реальную или близкую к реальной ситуацию. График характеризует изменение в зависимости от времени некоторой величины (температуры, стоимости акций и т. д.). Как правило, в задании требуется найти наибольшее (наименьшее) значение этой величины, разность между наибольшим и наименьшим значением (возможно, за определенный период времени). При решении задач типа В8 необходимо основываться на геометрическом смысле производной. Задачи типа В14 – это задания на вычисление с помощью производной точек экстремума данной функции или наибольшего (наименьшего) значения данной функции на данном отрезке.

Тема 6. Уравнения и неравенства (8 ч). *Иррациональные, показательные и логарифмические уравнения и неравенства. Комбинированные уравнения и неравенства*.

Необходимо повторить различные приемы решения иррациональных, показательных и логарифмических уравнений и неравенств. Уделить внимание решению комбинированных уравнений и неравенств.

Тема 7. Стереометрия (8 ч). *Площади поверхностей и объемы многогранников и тел вращения*.

Задания на применение основных формул, связанных с вычислением площадей поверхностей или объемов многогранников (пирамид и призм) или тел вращения (цилиндров, конусов, шаров), в том числе вписанных в другие многогранники или тела вращения или описанных около них.

Тема 8. Комбинаторика и вероятность (8 ч). *Перебор вариантов, применение правил комбинаторного умножения и сложения. Перестановки. Размещения. Сочетания. Формула классической вероятности. Основные теоремы о вероятности суммы и произведения событий.*

Задания на использование идей бесформульной комбинаторики, применение основных формул комбинаторики. Нахождение вероятности события. Решение задач на определение вероятности произведения или суммы событий.

Система заданий, представленная в учебном пособии, реализована авторами в практической деятельности в ходе работы подготовительных курсов по математике. Возможно, специфика работы в малых группах определила выбор предложенной методики, однако считаем, что книга может быть полезна и при традиционном подходе подготовки школьников к сдаче ЕГЭ.

Текстовые задачи

Занятие 1

Часть 1. Аудиторная работа

1. Летом килограмм помидоров стоит 25 рублей. Мама купила 2 кг 400 г помидоров. Сколько сдачи она должна получить со 100 рублей?

2. Даша купила месячный проездной билет на автобус. За месяц она сделала 52 поездки. Сколько рублей она сэкономила, если проездной билет стоит 840 рублей, а разовая поездка – 18 рублей?

3. Пакетик сока стоит 13 рублей 50 копеек. Какое наибольшее количество пакетиков сока можно купить на 100 рублей?

4. Больному прописан курс лекарства, которое нужно принимать по 0,5 г 2 раза в день в течение 21 дня. Упаковка содержит 10 таблеток по 0,5 г. Какое наименьшее количество упаковок требуется на весь курс лечения?

5. Для приготовления малинового варенья на 1 кг малины нужно 1,3 кг сахара. Сколько килограммовых упаковок сахара нужно купить, чтобы сварить варенье из 6 кг малины?

6. В июле 1 кг яблок стоил 60 рублей. В августе яблоки подешевели на 35%. Сколько рублей стоил 1 кг яблок после снижения цены?

7. Тетрадь стоит 3 рубля 20 копеек. Если покупатель покупает более 100 тетрадей, то магазин делает скидку 10% от стоимости всей покупки. Представитель школы купил 200 тетрадей. Сколько рублей он заплатит за покупку?

8. Налог на доходы составляет 13% от заработной платы. Заработная плата Петра Ивановича равна 24 000 рублей. Сколько рублей он получит после удержания налога на доходы?

9. Джинсы стоили 1 200 рублей. После повышения цены они стали стоить 1 320 рублей. На сколько процентов было повышена цена на джинсы?

10. Тарелка стоит 60 рублей. Какое наибольшее число таких тарелок можно будет купить на 500 рублей во время распродажи, когда скидка составляет 15%?

11. В городе N живет 12 000 жителей, среди них 25% детей и подростков. 30% взрослых не работает (пенсионеры, студенты, домохозяйки и т. п.). Сколько взрослых жителей города работает?

12. Клиент взял в банке кредит на сумму 18 000 рублей с годовой процентной ставкой 16%. Он должен погашать кредит, внося ежемесячно одинаковую сумму денег, чтобы через год выплатить всю сумму, взятую в кредит, вместе с процентами. Сколько рублей он должен вносить в банк ежемесячно?

Ответы

1	2	3	4	5	6
40	96	7	5	8	39
7	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
576	20 880	10	9	6 300	1 740

Часть 2. Самостоятельная работа

13. 1 киловатт-час электроэнергии стоит 1 рубль 60 копеек. Счетчик 1 ноября показывал 32 544 киловатт-часа, а 1 декабря – 32 726 киловатт-часов. Сколько рублей нужно заплатить за ноябрь?

14. Один килограмм огурцов стоит 15 рублей. Мама купила 2 кг 400 г огурцов. Сколько сдачи она должна получить со 100 рублей?

15. Андрей Петрович купил американский автомобиль, на спидометре которого скорость измеряется в милях в час. Американская миля равна 1 609 м. Какова скорость автомобиля в километрах в час, если спидометр показывает 42 мили в час? Ответ округлите до целого.

16. В пачке 500 листов бумаги. За неделю в офисе расходуется 1 200 листов. Какое наименьшее количество пачек нужно купить в офис на 8 недель?

17. Рубашка стоит 450 рублей. Во время распродажи скидка составляет 20%. Сколько рублей стоит рубашка во время распродажи?

18. Магазин делает пенсионерам скидку на определенное количество процентов от цены покупки. Пакет кефира стоит в магазине 40 рублей. Пенсионер заплатил за пакет кефира 38 рублей. Сколько процентов составляет скидка для пенсионеров?

19. В супермаркете проходит рекламная акция: заплатив за две шоколадки, покупатель получает три шоколадки. Шоколадка стоит 35 рублей. Какое наибольшее число шоколадок можно получить на 200 рублей?

20. В городе N живет 300 000 жителей, среди них 20% детей и подростков. 35% взрослых не работает (пенсионеры, студенты, домохозяйки и т. п.). Сколько взрослых жителей города работает?

Занятие 2

Часть 1. Аудиторная работа

21. При строительстве сельского дома можно использовать один из двух типов фундамента: каменный или бетонный. Для каменного фундамента необходимо 11 тонн природного камня и 11 мешков цемента. Для бетонного фундамента необходимо 8 тонн щебня и 57 мешков цемента. Тонна камня стоит 1 650 рублей, щебень стоит 790 рублей за тонну, а мешок цемента стоит 240 рублей. Сколько рублей будет стоить материал для фундамента, если выбрать наиболее дешевый вариант?

22. Для транспортировки 43 тонн груза на 1 400 км можно воспользоваться услугами одной из трех транспортных компаний. Стоимость перевозки и грузоподъемность автомобилей для каждой компании указаны в таблице. Сколько рублей придется заплатить за самую дешевую перевозку груза?

Компания-перевозчик	Стоимость перевозки одним автомобилем (руб. на 100 км)	Грузоподъемность автомобиля (т)
А	3700	3,5
Б	4300	5
В	9800	12

23. Интернет-провайдер предлагает три тарифных плана.

Тарифный план	Абонентская плата	Плата за трафик
План «0»	Нет	0,9 рублей за 1 Мб
План «300»	318 рублей за 300 Мб трафика в месяц	0,6 рублей за 1 Мб сверх 300 Мб
План «900»	819 рублей за 900 Мб трафика в месяц	0,5 рублей за 1 Мб сверх 900 Мб

Пользователь предполагает, что его трафик составит 850 Мб в месяц, и, исходя из этого, выбирает наиболее дешевый тарифный план. Сколько рублей заплатит пользователь за месяц, если его трафик действительно будет равен 850 Мб?

24. Для изготовления книжных полок требуется заказать 30 одинаковых стекол в одной из трех фирм. Сумма заказа складывается из стоимости стекла, резки стекла и шлифовки края. Площадь каждого стекла 0,35 м^2. В таблице приведены цены на стекло, а также на резку стекол и шлифовку края. В какой фирме заказ будет стоить меньше всего? В ответе укажите стоимость этого заказа (в рублях).

Фирма	Цена стекла (руб. на 1 м^2)	Резка и шлифовка (руб. за одно стекло)
А	510	70
Б	530	60
В	570	50

25. Клиент хочет арендовать автомобиль на сутки для поездки протяженностью 600 км. В таблице приведены характеристики трех автомобилей и стоимость их аренды. Помимо аренды клиент обязан оплатить топливо для автомобиля на всю поездку. Какую сумму в рублях заплатит клиент за аренду и топливо, если выберет самый дешевый вариант?

Автомобиль	Вид топлива	Расход топлива (л на 100 км)	Арендная плата (руб. за 1 сутки)
1	Дизельное	6	3400
2	Бензин	8	3000
3	Газ	12	3200

Цена дизельного топлива 16,5 рублей за литр, бензина 21 рубль за литр, газа 15 рублей за литр.

26. Семья из трех человек едет из Санкт-Петербурга в Вологду. Можно ехать поездом, а можно – на своей машине. Билет на поезд на одного человека стоит 690 рублей. Автомобиль расходует 8 литров бензина на 100 км пути, расстояние по шоссе равно 700 км, а цена бензина равна 18,5 рублей за литр. Сколько рублей будет стоить самая дешевая поездка для этой семьи?

27. Для того чтобы связать свитер, требуется 600 г шерсти красного цвета. Можно купить красную шерсть по цене 80 рублей за 50 г, а можно купить некрашеную шерсть по цене 70 рублей за 50 г и окрасить ее. Один пакетик краски стоит 50 рублей и рассчитан на окраску 300 г шерсти. Какой вариант покупки дешевле? В ответ напишите, сколько рублей будет стоить эта покупка.

28. От дома до дачи можно доехать на автобусе, на электричке или на маршрутном такси. В таблице показано время, которое нужно затратить на каждый участок пути. Какое наименьшее время потребуется на дорогу? Ответ дайте в часах.

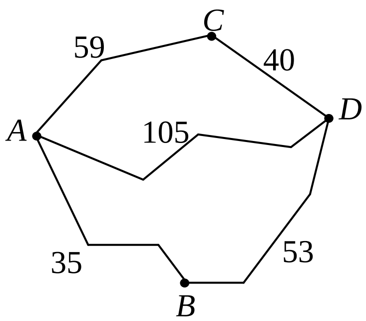
Автобус	**Электричка**	**Маршрутное такси**
От дома до автобусной станции – 20 мин	От дома до станции железной дороги – 15 мин	От дома до остановки такси – 25 мин
Автобус в пути 1 ч 55 мин	Электричка в пути 1 ч 20 мин	Маршрутное такси в дороге 1 ч 30 мин
От остановки автобуса до дачи пешком 5 мин	От станции до дачи пешком 40 мин	От остановки такси до дачи пешком 30 мин

29. В таблице даны тарифы на услуги трех фирм такси. Предполагается поездка длительностью 50 мин. Сколько рублей будет стоить самый дешевый заказ?

Фирма такси	**Подача машины**	**Продолжительность и стоимость минимальной поездки***	**Стоимость одной минуты поездки сверх минимальной поездки**
«Альфа»	350 рублей	Нет	12 рублей
«Бета»	Бесплатно	15 мин, 225 рублей	17 рублей
«Гамма»	180 рублей	20 мин, 350 рублей	14 рублей

*Если поездка продолжается меньше указанного времени, она оплачивается по стоимости минимальной поездки.

30. Из пункта A в пункт D ведут три дороги. Через пункт B едет грузовик со средней скоростью 32 км/ч, а через пункт C едет автобус со средней скоростью 44 км/ч. Третья дорога – без промежуточных пунктов, и по ней движется легковой автомобиль со средней скоростью 42 км/ч. На схеме указаны расстояния между пунктами в км.



Все три автомобиля одновременно выехали из A. Какой автомобиль добрался до D позже других? В ответе укажите, сколько часов он находился в дороге.

31. В таблице даны условия банковского вклада в трех различных банках. Предполагается, что клиент кладет на счет 5 000 рублей на срок 1 год. В каком банке к концу года вклад окажется наибольшим? В ответе укажите сумму этого вклада в рублях.

Банк	Обслуживание счета*	Процентная ставка (% годовых)**
«Фобос»	30 рублей в год	2
«Деймос»	8 рублей в месяц	2,2
«Тритон»	Бесплатно	1,8

*В начале года или месяца со счета снимается указанная сумма в уплату за ведение счета.
**В конце года вклад увеличивается на указанное количество процентов.

32. Строительной фирме нужно приобрести 40 м^3 строительного бруса. У нее есть три поставщика. Сколько рублей придется заплатить за самую дешевую покупку с доставкой?

Поставщик	Стоимость бруса (руб. за м^3)	Стоимость доставки (руб.)	Дополнительные условия
А	4 200	10 200	
Б	4 800	8 200	При заказе свыше 150 000 рублей доставка бесплатно
В	4 300	8 200	При заказе свыше 200 000 рублей доставка бесплатно

Ответы

21	22	23	24	25	26
20 000	541 800	648	7 365	3 994	1 036
27	**28**	**29**	**30**	**31**	**32**
940	2,25	820	2,75	5 090	178 200

Часть 2. Самостоятельная работа

33. Для остекления веранды требуется заказать 30 одинаковых стекол в одной из трех фирм. Площадь каждого стекла 0,3 м^2. В таблице приведены цены на стекло и на резку стекол. Сколько рублей будет стоить самый дешевый заказ?

Фирма	Цена стекла (руб. за 1 м^2)	Резка стекла (руб. за стекло)	Дополнительные условия
А	300	17	
Б	320	10	
В	340	8	При заказе свыше 3 000 рублей резка бесплатно

34. При строительстве сельского дома можно использовать один из двух типов фундамента: каменный или бетонный. Для каменного фундамента необходимо 9 тонн природного камня и 10 мешков цемента. Для бетонного фундамента необходимо 7 тонн щебня и 50 мешков цемента. Тонна камня стоит 1 600 рублей, щебень стоит 720 рублей за тонну, а мешок цемента стоит 250 рублей. Сколько рублей будет стоить материал для фундамента, если выбрать наиболее дешевый вариант?

35. Для перевозки 4 тонн груза на 350 км можно воспользоваться услугами одной из трех транспортных компаний. Стоимость перевозки и грузоподъемность автомобилей для каждой компании указаны в таблице. Сколько рублей будет стоить наиболее дешевый вариант перевозки груза?

Компания-перевозчик	Стоимость перевозки одним автомобилем (руб. на 10 км)	Грузоподъемность автомобиля (т)
А	110	2,2
Б	120	2,4
В	160	3,2

36. Телефонная компания представляет на выбор три тарифных плана.

Тарифный план	Абонентская плата	Плата за одну минуту разговора
Повременный	135 рублей в месяц	0,3 рублей
Комбинированный	255 рублей за 450 минут в месяц	0,28 рублей за 1 минуту сверх 450 минут в месяц
Безлимитный	380 рублей	0 рублей

Абонент выбрал наиболее дешевый тарифный план исходя из предположения, что общая длительность телефонных разговоров составит 800 минут в месяц. Какую сумму он должен будет заплатить за месяц, если общая длительность разговоров в этом месяце действительно будет равна 800 минутам? Ответ дайте в рублях.

37. В таблице даны условия банковского вклада в трех различных банках. Предполагается, что клиент кладет на счет 50 000 рублей на срок 1 год. В каком банке к концу года вклад окажется наибольшим? В ответе укажите сумму этого вклада в рублях.

Банк	Обслуживание счета*	Процентная ставка (% годовых)**
«Плутон»	40 рублей в год	1,7
«Сатурн»	8 рублей месяц	2,5
«Венера»	Бесплатно	1,4

*В начале года или месяца со счета снимается указанная сумма в уплату за ведение счета.

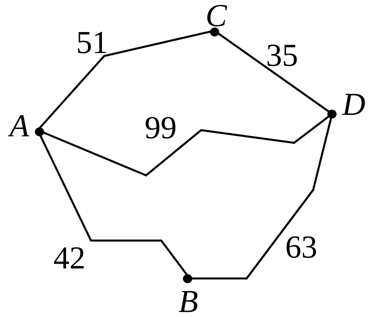
**В конце года вклад увеличивается на указанное количество процентов.

38. В таблице указаны средние цены на ряд основных продуктов питания в трех городах России (по данным некоторого исследования).

Наименование продукта	Средняя цена (в руб.)		
	Петрозаводск	Ставрополь	Омск
Пшеничный хлеб (батон)	18	11	16
Молоко (1 л)	28	20	24
Картофель (1 кг)	9	13	16
Сыр (1 кг)	240	215	260
Мясо (говядина, 1 кг)	275	230	295
Подсолнечное масло (1 л)	38	44	50

Определите, в каком из этих трех городов окажется самым дешевым следующий набор продуктов: 2 кг картофеля; 1 кг сыра; 1 л подсолнечного масла. В ответ запишите полученную сумму в рублях.

39. Из пункта A в пункт D ведут три дороги. Через пункт B едет грузовик со средней скоростью 42 км/ч, через пункт C едет автобус со средней скоростью 43 км/ч. Третья дорога – без промежуточных пунктов, и по ней движется легковой автомобиль со средней скоростью 66 км/ч. На схеме указаны расстояния между пунктами в км.



Все три автомобиля одновременно выехали из A. Какой автомобиль добрался до D позже других? В ответе укажите, сколько часов он находился в дороге.

40. От дома до дачи можно доехать на автобусе, на электричке или на маршрутном такси. В таблице показано время, которое нужно затратить на каждый участок пути. Какое наименьшее время потребуется на дорогу? Ответ дайте в часах.

Автобус	**Электричка**	**Маршрутное такси**
От дома до автобусной станции – 5 мин	От дома до станции железной дороги – 10 мин	От дома до остановки такси – 15 мин
Автобус в пути 2 ч 10 мин	Электричка в пути 1 ч 50 мин	Маршрутное такси в дороге 1 ч
От остановки автобуса до дачи пешком 5 мин	От станции до дачи пешком 15 мин	От остановки такси до дачи пешком 70 мин

Занятие 3

Часть 1. Аудиторная работа

41. Для одного из предприятий-монополистов зависимость объема спроса на продукцию q (единиц в месяц) от ее цены p (тысяч рублей) задается формулой $q = 210 - 15p$. Определите максимальный уровень цены p (в тысячах рублей), при котором значение выручки предприятия за месяц $r = q \cdot p$ составит не менее 360 тысяч рублей.

42. В боковой стенке цилиндрического бака вблизи дна закреплен кран, из которого может вытекать вода, при этом высота столба воды в нем меняется по закону $H(t) = 1{,}8 - 0{,}96t + 0{,}128t^2$, где t – время в минутах. В течение какого времени вода будет вытекать из бака?

43. Зависимость температуры (в кельвинах) от времени работы (в минутах) для нагревательного элемента некоторого прибора была получена экспериментально и на исследуемом интервале температур задается выражением $T(t) = T_0 + at + bt^2$, где $T_0 = 580$ К, $a = 20$ К/мин, $b = -0{,}2$ К/мин^2. Известно, что при температурах нагревателя свыше 1 000 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключать. Определите (в минутах), через какое наибольшее время после начала работы нужно отключать прибор.

44. Коэффициент полезного действия некоторого двигателя определяется формулой $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\%$. При каком наименьшем значении температуры нагревателя T_1 КПД этого двигателя будет не менее 80%, если температура холодильника $T_2 = 400$ К?

45. В розетку электросети подключены приборы, общее сопротивление которых составляет 90 Ом. Параллельно с ними в розетку предполагается подключить электрообогреватель. Определите (в омах) наименьшее возможное сопротивление этого электрообогревателя, если известно, что при параллельном соединении двух проводников с сопротивлениями R_1 и R_2 их общее сопротивление задается формулой $R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$, а для нормального функционирования электросети общее сопротивление в ней должно быть не меньше 30 Ом.

46. Для определения эффективной температуры звезд используют закон Стефана – Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела прямо пропорциональна площади его поверхности и четвертой степени температуры: $P = \delta S T^4$, где $\delta = 5{,}7 \cdot 10^{-8}$ – числовой коэффициент, площадь измеряется в квадратных метрах, температура – в кельвинах, мощность – в ваттах. Известно, что некоторая звезда имеет площадь $S = \frac{1}{16} \cdot 10^{16}$ м^2, а излучаемая ею мощность P не менее $46{,}17 \cdot 10^{17}$, определите наименьшую возможную температуру этой звезды.

47. После дождя уровень воды в колодце может повыситься. Мальчик определяет его, измеряя время падения t небольших камушков в колодец и рассчитывая по формуле $h = -5t^2$, где h – уровень воды в м, а t – время падения камушка в с. До дождя время падения камушков составляло 1 с. На какую минимальную высоту должен подняться уровень воды после дождя, чтобы измеряемое время изменилось не менее чем на 0,2 с? Ответ выразите в метрах.

48. На верфи инженеры проектируют новый аппарат для погружения на большие глубины. Конструкция имеет кубическую форму, а значит, сила Архимеда, действующая на аппарат, будет определяться по формуле: $F_A = \rho g l^3$, где l – линейный размер аппарата (длина ребра куба), $\rho = 1\,000$ кг/м^3 – плотность воды, а $g = 9{,}8$ Н/кг – ускорение свободного падения. Каковы могут быть максимальные линейные размеры аппарата (в метрах), чтобы обеспечить его эксплуатацию в условиях, когда выталкивающая сила при погружении не будет превосходить 2 116 800 Н?

49. В боковой стенке высокого цилиндрического бака вблизи дна закреплен кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака. При этом высота столба воды в нем, выраженная в метрах, меняется по закону $H(t) = H_0 - \sqrt{2gH_0}kt + \frac{g}{2}k^2t^2$, где t – прошедшее время (в секундах), $H_0 = 20$ м – начальная высота столба воды, $k = \frac{1}{300}$ – отношение площадей поперечных сечений крана и бака, а $g = 10$ м/с^2 – ускорение свободного падения. К какому моменту времени в баке останется воды не более чем четверть первоначального объема? Ответ выразите в секундах.

50. Камнеметательная машина выстреливает камни под определенным углом к горизонту с фиксированной начальной скоростью. Траектория полета камня в системе координат, связанной с машиной, описывается формулой $y = ax^2 + bx$, где $a = -\frac{1}{100}$ м$^{-1}$, $b = \frac{7}{10}$ – постоянные параметры, x – расстояние от машины до камня, считаемое по горизонтали, y – высота камня над землей. На каком наибольшем расстоянии от крепостной стены высотой 9 м нужно расположить машину, чтобы камни пролетали над ней на высоте не менее 1 метра?

51. Деталью некоторого прибора является вращающаяся катушка. Она состоит из трех однородных соосных цилиндров: центрального – массой $m = 2$ кг и радиуса $R = 15$ см – и двух боковых массами по $M = 1$ кг, радиусов $R + h$. При этом момент инерции катушки (в кг·см^2) относительно оси вращения определяется как $I = \frac{(m+2M)R^2}{2} + M(2Rh + h^2)$. При каком максимальном значении h (в см) момент инерции катушки не превышает предельных для нее 625 кг·см^2?

52. Камень брошен вниз с высоты 36 м. Пока камень не упал, его высоту можно находить по формуле $h(t) = 36 - 3t - 5t^2$ (h – высота в метрах, t – время в секундах, прошедшее с момента броска). Найдите, сколько секунд камень будет падать.

53. Операционная прибыль предприятия в краткосрочном периоде вычисляется по формуле $\pi(q) = q(p - v) - f$. Компания продает свою продукцию по цене $p = 500$ рублей за штуку, переменные затраты на производство одной единицы продукции составляют $v = 200$ рублей за штуку, постоянные расходы предприятия $f = 900\,000$ рублей в месяц. Определите наименьший месячный объем производства q (шт.), при котором прибыль предприятия будет не меньше 600 000 рублей в месяц.

54. При температуре 0°C рельс имеет длину $l_0 = 10$ *м*. При прокладке путей (рельсы укладывали при 0°C) между рельсами оставили зазор в 4,5 мм. При возрастании температуры будет происходить тепловое расширение рельса и его длина будет меняться по закону $l(t^\circ) = l_0(1 + \alpha \cdot t^\circ)$, где $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}$ (°C)$^{-1}$ – коэффициент теплового расширения, t° – температура (в градусах Цельсия). При какой минимальной температуре между рельсами исчезнет зазор? Ответ выразите в градусах Цельсия.

55. Высота над землей подброшенного вверх мяча меняется по закону $h(t) = 1{,}8 + 12t - 5t^2$ м. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте более четырех метров?

56. Масса радиоактивного вещества уменьшается по закону $m(t) = m_0 2^{-\frac{t}{T}}$. В лаборатории получили вещество, содержащее $m_0 = 12$ мг изотопа меди-64, период полураспада которого T равен 12,8 ч. В течение скольких часов количество изотопа меди-64 в веществе будет превосходить 3 мг?

Ответы

41	**42**	**43**	**44**	**45**	**46**
12	3,75	30	2 000	45	600
47	**48**	**49**	**50**	**51**	**52**
1,8	6	300	50	5	2,4
53	**54**	**55**	**56**		
5 000	37,5	2	25,6		

Часть 2. Самостоятельная работа

57. Для одного из предприятий-монополистов зависимость объема спроса на продукцию q (единиц в месяц) от ее цены p (тысяч рублей) задается формулой $q = 150 - 10p$. Определите максимальный уровень цены p (в тысячах рублей), при котором значение выручки предприятия за месяц $r = q \cdot p$ составит не менее 440 тысяч рублей.

58. Зависимость температуры (в кельвинах) от времени работы (в минутах) для нагревательного элемента некоторого прибора была получена экспериментально и на исследуемом интервале температур задается выражением $T(t) = T_0 + at + bt^2$, где $T_0 = 800$ К, $a = 52$ К/мин, $b = -0{,}4$ К/мин^2. Известно, что при температурах нагревателя свыше 2 000 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключать. Определите (в минутах), через какое наибольшее время после начала работы нужно отключать прибор.

59. Для определения эффективной температуры звезд используют закон Стефана – Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела прямо пропорциональна площади его поверхности и четвертой степени температуры: $P = \delta S T^4$, где $\delta = 5{,}7 \cdot 10^{-8}$ – числовой коэффициент, площадь измеряется в квадратных метрах, температура – в кельвинах. А мощность – в ваттах. Известно, что некоторая звезда имеет площадь $S = \frac{1}{81} \cdot 10^{16}$ м^2, а излучаемая ею мощность P не менее $9{,}12 \cdot 10^{21}$, определите наименьшую возможную температуру этой звезды.

60. Модель камнеметательной машины выстреливает камни под определенным углом к горизонту с фиксированной начальной скоростью. Ее конструкция такова, что траектория полета камня описывается формулой $y = ax^2 + bx$, где $a = -\frac{1}{5000}\ \frac{1}{\text{м}}$, $b = \frac{1}{10}$ – постоянные параметры, x – расстояние от машины до камня, считаемое по горизонтали, y – высота камня над землей. На каком наибольшем расстоянии от крепостной стены высотой 8 м нужно расположить машину, чтобы камни перелетели через нее?

61. Операционная прибыль предприятия в краткосрочном периоде вычисляется по формуле $\pi(q) = q(p - v) - f$. Компания продает свою продукцию по цене $p = 600$ рублей за штуку, переменные затраты на производство одной единицы продукции составляют $v = 300$ рублей за штуку, постоянные расходы предприятия $f = 700\,000$ рублей в месяц. Определите наименьший месячный объем производства q (штук), при котором прибыль предприятия будет не меньше 500 000 рублей в месяц.

62. При вращении ведерка с водой на веревке в вертикальной плоскости сила давления воды на дно не остается постоянной: она максимальна в нижней точке и минимальна в верхней. Вода не будет выливаться, если сила ее давления на дно будет положительной во всех точках траектории. В верхней точке сила давления равна $P = m\left(\frac{v^2}{L} - g\right)$, где m – масса воды, v – скорость движения ведерка, L – длина веревки, $g = 10$ м/с^2 – ускорение свободного падения. С какой минимальной скоростью надо вращать ведерко, чтобы вода не выливалась из него, если длина веревки равна 78,4 см? Ответ выразите в м/с.

63. При температуре 0°C рельс имеет длину $l_0 = 15$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону $l(t^\circ) = l_0(1 + \alpha \cdot t^\circ)$, где $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}$ (°C)$^{-1}$ – коэффициент теплового расширения, t° – температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 6,3 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.

64. Высота над землей подброшенного вверх мяча меняется по закону $h(t) = 1{,}6 + 8t - 5t^2$ м (h – высота в метрах, t – время в секундах, прошедшее с момента броска). Сколько секунд мяч будет находиться на высоте не менее 3 метров?

Занятие 4

Часть 1. Аудиторная работа

65. Брюки дороже рубашки на 20% и дешевле пиджака на 46%. На сколько процентов рубашка дешевле пиджака?

66. Из города A в город B одновременно выехали два автомобилиста. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью, меньшей скорости первого на 15 км/ч, а вторую половину пути – со скоростью 90 км/ч, в результате чего прибыл в B одновременно с первым автомобилистом. Найдите скорость первого автомобилиста, если известно, что она больше 54 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

67. Заказ на 224 детали первый рабочий выполняет на 2 часа быстрее, чем второй. Сколько деталей в час делает второй рабочий, если известно, что первый за час делает на 2 детали больше?

68. Моторная лодка прошла против течения реки 55 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 6 часов меньше. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения равна 3 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

69. Цена холодильника в магазине ежегодно уменьшается на одно и то же число процентов от предыдущей цены. Определите, на сколько процентов каждый год уменьшалась цена холодильника, если, выставленный на продажу за 8 000 рублей, он через два года был продан за 6 480 рублей?

70. Баржа в 10:00 вышла из пункта A в пункт B, расположенный в 15 км от A. Пробыв в пункте B 1 час 20 минут, баржа отправилась назад и вернулась в пункт A в 18:00. Определите (в км/час) скорость течения реки, если известно, что собственная скорость баржи равна 6 км/ч.

71. Первая труба пропускает на 2 литра воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объемом 120 литров она заполняет на 4 минуты дольше, чем вторая труба заполняет резервуар объемом 96 литров?

72. Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 60 км/ч, проезжает мимо платформы, длина которой 400 м, за 30 с. Найдите длину поезда (в м).

73. Смешав 70%-й и 60%-й растворы кислоты и добавив 2 кг чистой воды, получили 50%-й раствор кислоты. Если бы вместо 2 кг воды добавили 2 кг 90%-го раствора той же кислоты, то получили бы 70%-й раствор кислоты. Сколько килограммов 70%-го раствора использовали для получения смеси?

Ответы

65	66	67	68	69	70	71	72	73
55	60	14	8	10	3	10	100	3

Часть 2. Самостоятельная работа

74. На день рождения полагается дарить букет из нечетного числа цветов. Тюльпаны стоят 70 рублей за штуку. У Вани есть 300 рублей. Из какого наибольшего числа тюльпанов он может купить букет Маше на день рождения?

75. Первая труба пропускает на 5 литров воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если резервуар объемом 704 литра она заполняет на 10 минут быстрее, чем первая труба заполняет резервуар объемом 864 литра?

76. Телефонная компания предоставляет на выбор три тарифных плана.

Тарифный план	Абонентская плата	Плата за одну минуту разговора
Повременный	135 рублей в месяц	0,3 рубля
Комбинированный	255 рублей за 450 минут в месяц	0,28 рублей за 1 минуту сверх 450 минут в месяц
Безлимитный	380 рублей	0 рублей

Абонент выбрал наиболее дешевый тарифный план исходя из предположения, что общая длительность телефонных разговоров составит 800 минут в месяц. Какую сумму он должен заплатить за месяц, если общая длительность разговоров в этом месяце действительно будет равна 800 минутам? Ответ дайте в рублях.

77. Для одного из предприятий-монополистов зависимость объема спроса на продукцию q (единиц в месяц) от ее цены p (тысяч рублей) задается формулой $q = 170 - 10p$. Определите максимальный уровень цены p (в тысячах рублей), при котором значение выручки предприятия за месяц $r = q \cdot p$ составит не менее 700 тысяч рублей.

78. Из A в B одновременно выехали два автомобилиста. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью, меньшей скорости первого на 18 км/ч, а вторую половину пути – со скоростью 108 км/ч, в результате чего прибыл в B одновременно с первым автомобилистом. Найдите скорость первого автомобилиста, если известно, что она больше 63 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

79. В таблице даны тарифы на услуги трех фирм такси. Предполагается поездка длительностью 60 минут. Сколько рублей будет стоить самый дешевый заказ?

Фирма такси	Подача машины	Продолжительность и стоимость минимальной поездки*	Стоимость одной минуты поездки сверх минимальной поездки
1	300 рублей	Нет	13 рублей
2	Бесплатно	20 мин – 300 рублей	18 рублей
3	180 рублей	15 мин – 250 рублей	14 рублей

*Если поездка продолжается меньше указанного времени, она оплачивается по стоимости минимальной поездки.

80. На верфи инженеры проектируют новый аппарат для погружения на небольшие глубины. Конструкция имеет кубическую форму, а значит, сила Архимеда, действующая на аппарат, будет определяться по формуле $F_A = \rho g l^3$, где l – длина ребра куба в метрах, $\rho = 1\,000$ кг/м^3 – плотность воды, а $g = 9{,}8$ Н/кг – ускорение свободного падения. Какой может быть максимальная длина ребра куба, чтобы обеспечить его эксплуатацию в условиях, когда выталкивающая сила при погружении будет не больше чем 5 017,6 Н? Ответ выразите в метрах.

81. Кружка стоит 180 рублей. Какое наибольшее число кружек можно купить на 900 рублей во время распродажи, когда скидка составляет 35%?

Планиметрия

Занятие 5

Часть 1. Аудиторная работа

82. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC боковая сторона AB равна 14, а $\cos A = \frac{\sqrt{195}}{14}$. Найдите высоту, проведенную к основанию.

83. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC боковая сторона AB равна 10, а высота, проведенная к основанию, равна $\sqrt{19}$. Найдите косинус угла A.

84. В треугольнике ABC угол C равен 90°, AB = 20, AC = 16. Найдите $\sin A$.

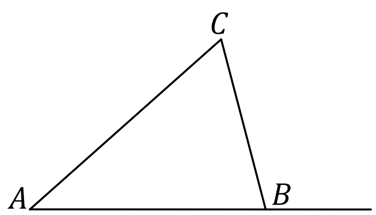
85. В треугольнике ABC угол C равен 90°, AB = 60, AC = 48. Найдите $\operatorname{tg} A$.

86. В треугольнике ABC угол C равен 90°, CH – высота, угол A равен 60°, AB = 4. Найдите AH.

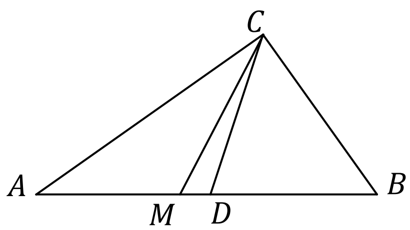
87. В треугольнике ABC AC = BC, AB = 8, $\operatorname{tg} A = \frac{3}{4}$. Найдите высоту CH.

88. В параллелограмме $ABCD$ AB = 6, AD = 4, $\sin A = 0{,}8$. Найдите большую высоту параллелограмма.

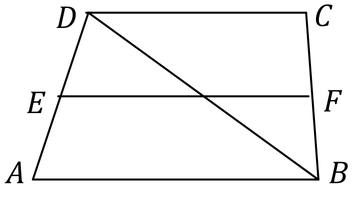
89. В треугольнике ABC угол A равен 40°, внешний угол при вершине B равен 102°. Найдите угол C. Ответ дайте в градусах.



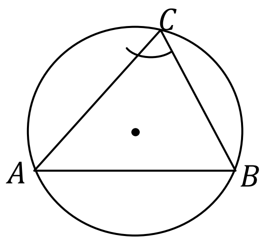
90. Острые углы прямоугольного треугольника равны 24° и 66°. Найдите угол между биссектрисой CD и медианой CM, проведенными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.



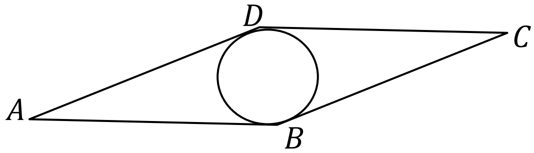
91. Основания трапеции равны 4 и 10. Найдите больший из отрезков, на которые делит среднюю линию этой трапеции одна из ее диагоналей.



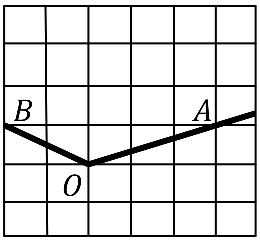
92. Найдите хорду, на которую опирается угол 60°, вписанный в окружность радиуса $\sqrt{3}$.



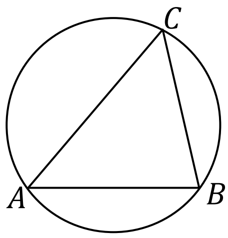
93. Острый угол ромба равен 30°. Радиус вписанной в этот ромб окружности равен 2. Найдите сторону ромба.



94. Найдите тангенс угла AOB.



95. Сторона AB треугольника ABC равна 1. Противолежащий ей угол C равен 30°. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.



Ответы

82	83	84	85	86	87	88
1	0,9	0,6	0,75	1	3	4,8
89	**90**	**91**	**92**	**93**	**94**	**95**
62	21	5	3	8	–1	1

Часть 2. Самостоятельная работа

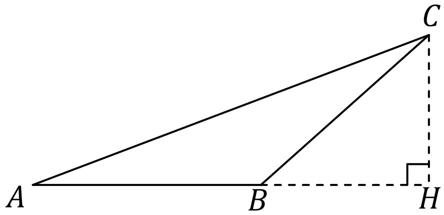
96. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $\sin A = \frac{3}{4}$, $AC = 6\sqrt{7}$. Найдите AB.

97. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $AB = 70$, $AC = 56$. Найдите $\operatorname{tg} A$.

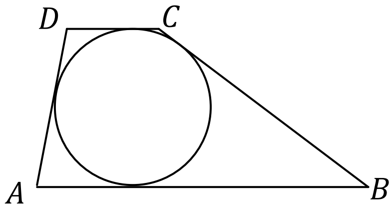
98. Основания равнобедренной трапеции равны 6 и 16. Высота трапеции равна 10. Найдите тангенс острого угла.

99. В треугольнике ABC угол C равен 90°, CH – высота, $BC = 8$, $CH = 4\sqrt{3}$. Найдите $\sin A$.

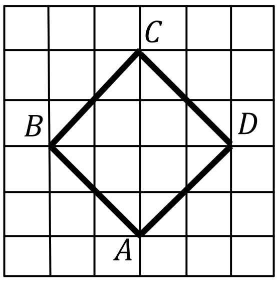
100. В треугольнике ABC $AB = BC$, CH – высота, $AB = 10$, $BH = 6$. Найдите синус угла ABC.



101. Боковые стороны трапеции, описанной около окружности, равны 3 и 5. Найдите среднюю линию трапеции.



102. Найдите радиус окружности, вписанной в квадрат $ABCD$, считая стороны квадратных клеток равными $\sqrt{2}$.



Занятие 6

Часть 1. Аудиторная работа

103. В треугольнике ABC синус угла C равен $\frac{3}{5}$, $AC = 5$, радиус вписанной в этот треугольник окружности равен 1. Найдите сторону BC, если $AB < AC$.

104. Треугольник ABC вписан в окружность с центром O. Длина стороны BC равна $3\sqrt{2}$, а скалярное произведение векторов $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ равно 9. Найдите длину стороны AB, если $\angle ACB = 45°$.

105. В треугольнике ABC сторона BC равна $2\sqrt{97}$, и она больше половины стороны AC. Найдите сторону AB, если медиана BM равна 12, а площадь треугольника ABC равна 96.

106. В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы углов B и C пересекают сторону AD в точках L и K соответственно. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если известно, что $BL = 6$, $CK = 8$ и $AB : AD = 1 : 3$.

107. В трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD диагонали AC и BD равны 18 и 16 соответственно. На диагонали AC как на диаметре построена окружность, пересекающая прямую AB в точке K. Найдите длину AK, если известно, что $\angle CAB$ в два раза меньше $\angle ABD$.

108. Хорды окружности AC и BD перпендикулярны и пересекаются в точке P. PH – высота треугольника ADP. Угол $ADP = 30°$, $AH = 2$, $PC = 6$. Найдите отношение площади треугольника ADC к площади треугольника ABC.

109. Дан ромб $ABCD$ с острым углом при вершине A. Площадь ромба равна 135, а $\sin A = \frac{3}{5}$. Высота DK пересекает диагональ AC в точке L. Найдите длину отрезка DL.

110. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD угла BAC, равного 60°. Известно, что $BC = 6$, $CD = 2$. Определите градусную меру угла ABC.

111. В равнобедренном треугольнике точка касания вписанной окружности делит боковую сторону в отношении 2 : 5, считая от вершины основания. Радиус окружности, вписанной в этот треугольник, равен $2\sqrt{5}$. Найдите боковую сторону.

112. Точка O является центром правильного восьмиугольника $A_1A_2 \dots A_8$, площадь треугольника $A_1A_3A_5$ равна 9. Точка B выбрана таким образом, что треугольник A_1A_7B равновелик треугольнику A_2OA_5. Найдите высоту треугольника A_1A_7B, проведенную из вершины B.

Ответы

103	**104**	**105**	**106**	**107**
4	6	10	72	10,125
108	**109**	**110**	**111**	**112**
2	5	30	21	1,5

Часть 2. Самостоятельная работа

113. Около равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) с углом B, равным 30°, описана окружность радиусом $7\sqrt{2}$. Ее диаметр AD пересекает сторону BC в точке E. Найдите диаметр окружности, описанной около треугольника AEC.

114. В треугольнике ABC сторона AB равна 10, угол A – острый. Найдите медиану BM, если $AC = 20$, а площадь треугольника ABC равна 96.

115. В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла D пересекает сторону AB в точке K и прямую BC в точке P. Найдите периметр треугольника BKP, если $DC = 10$, $PK = 6$, $DK = 9$.

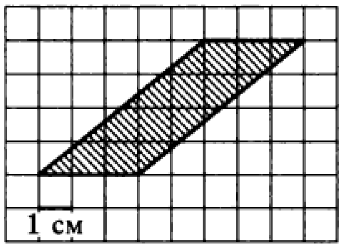
116. Радиусы двух пересекающихся окружностей равны 3 и 4. Расстояние между их центрами равно 5. Определите длину их общей хорды.

117. В трапеции $ABCD$ отношение длин оснований AD и BC равно 3. Диагонали трапеции пересекаются в точке O, площадь треугольника AOB равна 6. Найдите площадь трапеции.

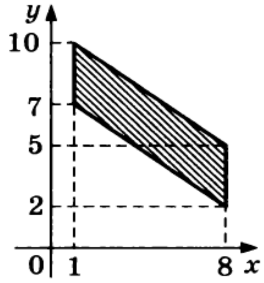
Занятие 7

Часть 1. Аудиторная работа

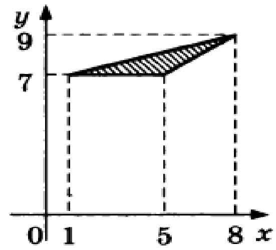
118. На клетчатой бумаге с клетками размером 1×1 см изображен параллелограмм. Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.



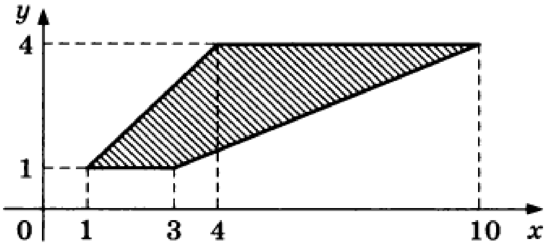
119. Найдите площадь четырехугольника, вершины которого имеют координаты (1; 7), (8; 2), (8; 5), (1; 10).



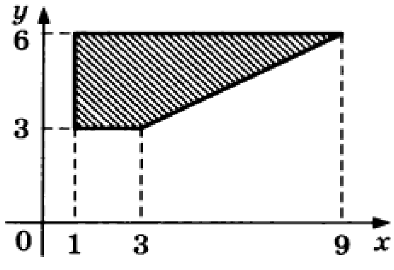
120. Найдите площадь треугольника, вершины которого имеют координаты (1; 7), (5; 7), (8; 9).



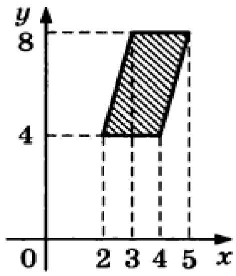
121. Найдите площадь трапеции, изображенной на рисунке.



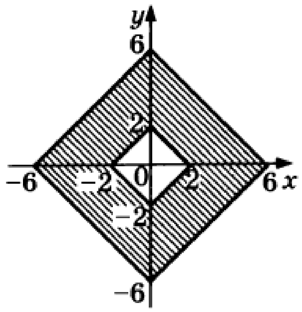
122. Найдите площадь трапеции, изображенной на рисунке.



123. Найдите площадь параллелограмма, изображенного на рисунке.

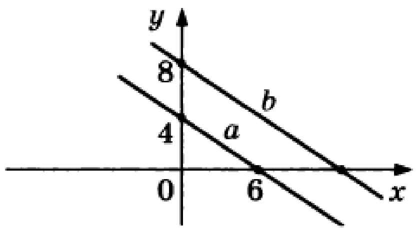


124. Найдите площадь фигуры на координатной плоскости.

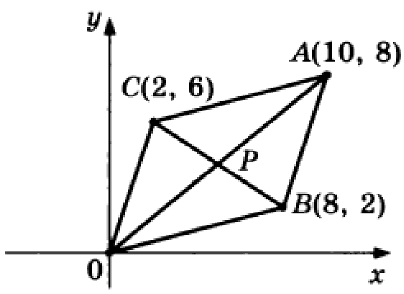


125. Площадь круга равна $\frac{1}{\pi}$. Найдите длину окружности.

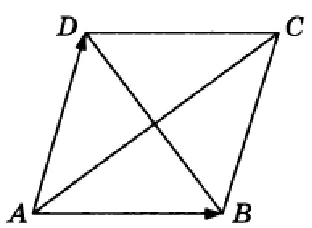
126. Прямая a проходит через точки с координатами (0; 4) и (6; 0). Прямая b проходит через точку с координатами (0; 8) и параллельна прямой a. Найдите абсциссу точки пересечения прямой b с осью Ox.



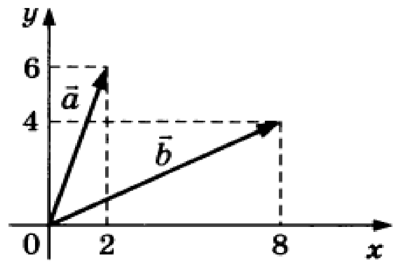
127. Точки O (0; 0), A (10; 8), B (8; 2), C (2; 6) являются вершинами четырехугольника. Найдите ординату точки P пересечения его диагоналей.



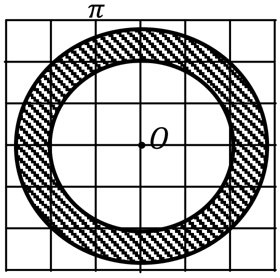
128. Диагонали ромба $ABCD$ равны 12 и 16. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$.



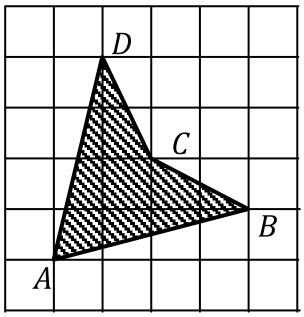
129. Найдите сумму координат вектора $\vec{a} + \vec{b}$.



130. Найдите площадь S кольца, считая стороны квадратных клеток равными 1. В ответе укажите $\frac{S}{\pi}$.



131. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, считая стороны квадратных клеток равными 1.

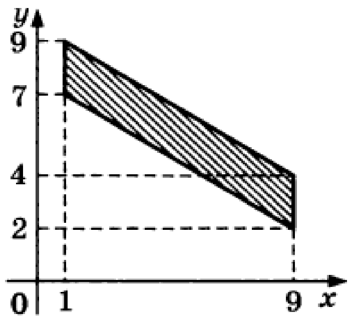


Ответы

118	119	120	121	122	123	124
12	21	4	12	15	8	64
125	**126**	**127**	**128**	**129**	**130**	**131**
2	12	4	12	20	4	6

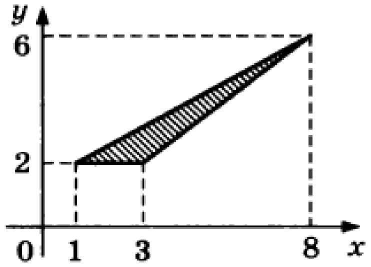
Часть 2. Самостоятельная работа

132. Найдите площадь четырехугольника, вершины которого имеют координаты (1; 7), (9; 2), (9; 4), (1; 9).

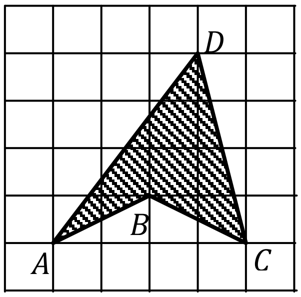


133. Высота трапеции равна 10, площадь равна 150. Найдите среднюю линию трапеции.

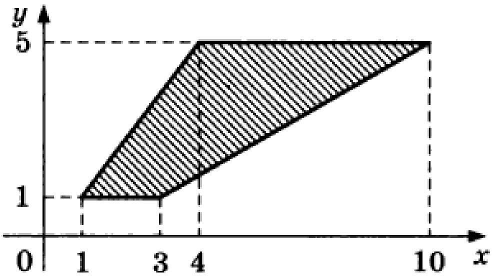
134. Найдите площадь треугольника, изображенного на рисунке.



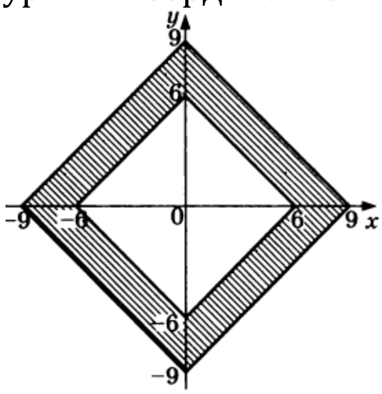
135. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, считая стороны квадратных клеток равными 1.



136. Найдите площадь трапеции, изображенной на рисунке.

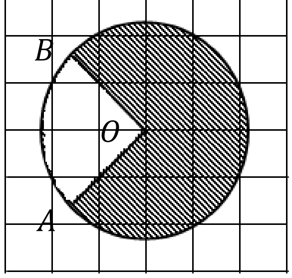


137. Найдите площадь фигуры на координатной плоскости.



138. Найдите площадь ромба, если его высота равна 2, а острый угол 30°.

139. Найдите площадь S сектора, считая стороны квадратных клеток равными 1. В ответе укажите $\frac{S}{\pi}$.



Занятие 8

Часть 1. Аудиторная работа

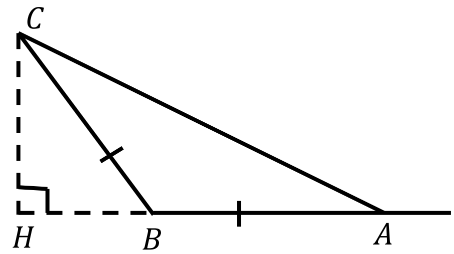
140. В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой BC проведена высота AH, причем $BH = 4$, синус угла B равен $\frac{1}{3}$. Найдите HC.

141. Треугольник ABC вписан в окружность с центром в точке O. Угол A равен 31°, угол C равен 25°. Найдите в градусах значение $\angle AOC$.

142. Диагональ прямоугольника равна 39, и она образует со стороной прямоугольника угол, тангенс которого равен 2,4. Найдите периметр прямоугольника.

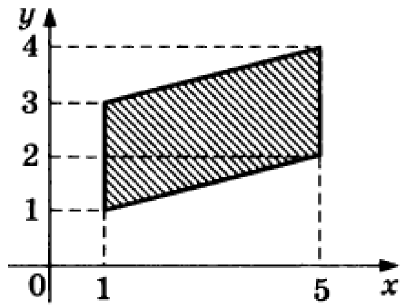
143. В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой $AB = 75$ катет $AC = 60$. Найдите $\text{tg}A$.

144. В треугольнике ABC $AB = BC$, $AB = 5$, высота CH равна 4. Найдите тангенс внешнего угла при вершине A.

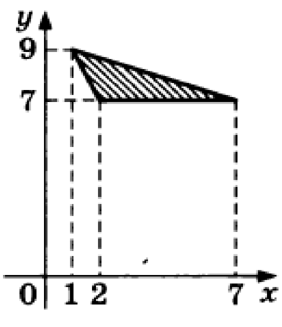


145. Периметр прямоугольного треугольника равен 24 см, а площадь 24 см^2. Найдите высоту треугольника, проведенную к гипотенузе, в сантиметрах.

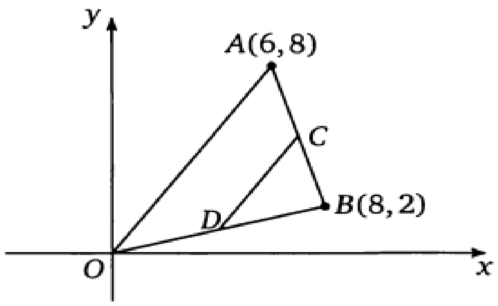
146. Найдите площадь четырехугольника, изображенного на рисунке.



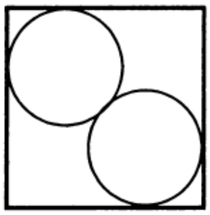
147. Найдите площадь треугольника, вершины которого имеют координаты (2; 7), (7; 7), (1; 9).



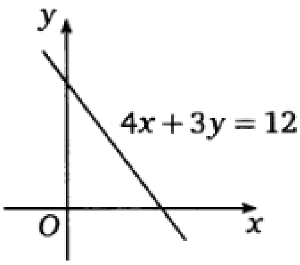
148. Точки O (0; 0), A (6; 8), B (8; 2) являются вершинами треугольника. Найдите длину его средней линии CD.



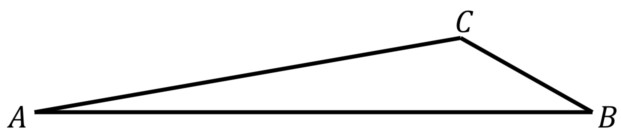
149. Каждая коза на пастбище привязана к колышку веревкой длиной в 5 метров. Пастух решил подготовить площадку в виде квадрата, сторона которого равна целому числу метров. Козы не должны выходить за этот квадрат и не должны мешать друг другу. Найдите минимальную длину стороны квадрата в метрах, на котором пастух сможет разместить 2 козы.



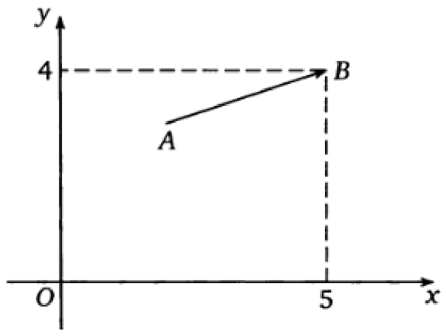
150. Найдите расстояние от начала координат до прямой, заданной уравнением $4x + 3y = 12$.



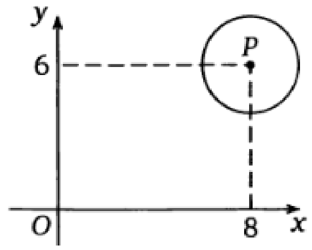
151. Сторона AB тупоугольного треугольника ABC равна радиусу описанной около него окружности. Найдите угол C.



152. Вектор $\overrightarrow{AB}$ с концом в точке B (5; 4) имеет координаты (3; 1). Найдите сумму координат точки A.



153. Какого радиуса должна быть окружность с центром в начале координат, чтобы она касалась внутренним образом окружности с центром в точке P (8; 6) и радиусом 2?



Ответы

140	**141**	**142**	**143**	**144**	**145**	**146**
0,5	112	102	0,75	– 0,5	4,8	8
147	**148**	**149**	**150**	**151**	**152**	**153**
5	5	18	2,4	150	5	12

Часть 2. Самостоятельная работа

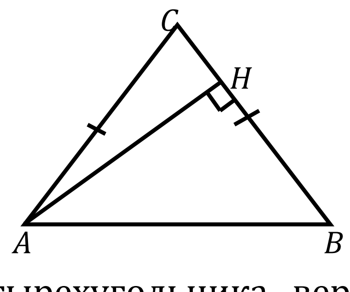
154. С учетом скидки в 3% от объявленной стоимости за холодильник было уплачено 17 848 рублей. Найдите объявленную стоимость холодильника в рублях.

155. Стороны основания равнобедренной трапеции равны 5 и 11, а боковая сторона равна 15. Найдите косинус тупого угла трапеции.

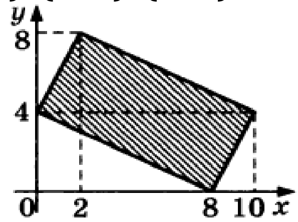
156. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $AB = 30$, $AC = 24$. Найдите tg$A$.

157. Семья из трех человек едет из Москвы в Чебоксары. Можно ехать поездом, а можно – на своей машине. Билет на поезд на одного человека стоит 740 рублей. Автомобиль расходует 9 литров бензина на 100 километров пути, расстояние по шоссе равно 700 км, а цена бензина равна 19 рублей за литр. В ответ напишите, сколько рублей будет стоить самый дешевый вариант.

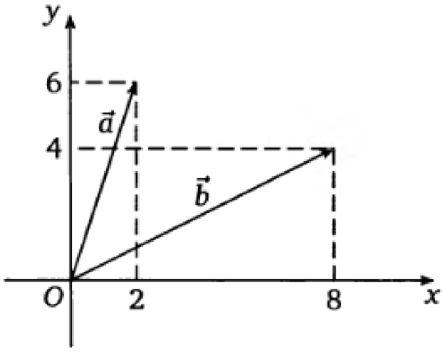
158. В треугольнике ABC $AC = BC$, $AB = 6$, $\cos A = 0{,}6$, AH – высота. Найдите BH.



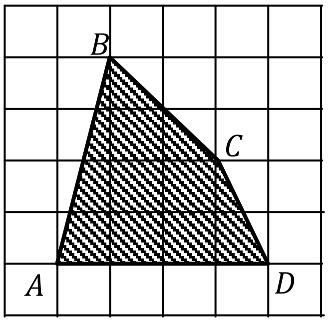
159. Найдите площадь четырехугольника, вершины которого имеют координаты (8; 0), (10; 4), (2; 8), (0; 4).



160. Найдите квадрат длины вектора $\vec{a} + \vec{b}$.



161. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, считая стороны квадратных клеток равными 1.



162. Первый рабочий делает за час на 5 деталей больше, чем второй. На сколько часов больше затратит второй рабочий на изготовление 800 деталей, если первый рабочий за час делает 25 деталей?

Тригонометрия

Занятие 9

Часть 1. Аудиторная работа

163. Решите уравнение $2\cos\frac{x}{2} = 1$.

164. Решите уравнение $3\mathrm{tg}x - \sqrt{3} = 0$.

165. Решите уравнение $\cos\left(\frac{3}{2}\pi + x\right) - 1 = 0$.

166. Найдите решения уравнения $2\mathrm{ctg}^2x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$.

167. Укажите наибольший отрицательный корень уравнения

$$\sin\frac{\pi}{2}\mathrm{tg}(-x) = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

168. При каких значениях x равно нулю значение функции

$$f(x) = 4\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4} - \sqrt{2}?$$

169. Укажите абсциссы точек пересечения графиков функций

$$f(x) = \mathrm{ctg}x - \mathrm{tg}^2x + 1, \qquad g(x) = 2 - \frac{1}{\mathrm{ctg}^2x}.$$

170. Решите уравнение $\sin(-4x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

171. Решите уравнение $\frac{1}{\text{ctg}x} = 1$.

172. Найдите решения уравнения $3\text{ctg}\frac{\pi}{3}\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3} = 0$.

173. Решите уравнение $\sin(\pi - x) - \frac{1}{2} = 0$.

174. Укажите абсциссы точек пересечения с осью Ox графика функции

$$f(x) = \sin 4x - \frac{1}{2}.$$

175. Найдите сумму наибольшего отрицательного и наименьшего положительного корней уравнения $4\sin^2 2x = 2$.

176. Найдите все значения аргумента, при которых значения функций $f(x) = \cos^2 4x + 1$, $g(x) = \sin^2 4x$ совпадают.

Ответы

163	$\pm\frac{2\pi}{3} + 4\pi n, n \in Z$	**170**	$(-1)^{n+1}\frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{4}, n \in Z$
164	$\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$	**171**	$\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$
165	$\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$	**172**	$\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$
166	$\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$	**173**	$(-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$
167	$-\frac{5\pi}{6}$	**174**	$(-1)^n\frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{4}, n \in Z$
168	$(-1)^n\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$	**175**	0
169	$\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$	**176**	$\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, n \in Z$

Часть 2. Самостоятельная работа

177. Решите уравнение $\cos(-3x) = 1$.

178. Решите уравнение $-\sqrt{8}\sin 2x + 2 = 0$.

179. Решите уравнение $\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sqrt{2} = 0$.

180. Найдите решения уравнения $4\cos\frac{\pi}{3}\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + \sqrt{3} = 0$.

181. Найдите абсциссы общих точек графика функции $y = 2\cos\frac{x}{2}$ и прямой $y = 1$.

182. Укажите абсциссы точек пересечения графиков функций

$$f(x) = \text{tg}x - \frac{1}{\text{tg}^2 x}, \quad g(x) = 1 - \text{ctg}^2 x.$$

183. Найдите сумму наибольшего отрицательного и наименьшего положительного корней уравнения $4\sin^2 2x = 3$.

184. Найдите корень уравнения $\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 1$ из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Занятие 10

Часть 1. Аудиторная работа

185. Решите уравнение $2\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\sqrt{2}=0$.

186. Найдите абсциссы общих точек графиков функций

$$f(x)=\sin\frac{\pi}{6}\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right),\quad g(x)=-\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

187. Найдите все значения аргумента, при которых значения функций $f(x)=1+\sin^2 5x$, $g(x)=\cos^2 5x$ совпадают.

188. Определите количество корней уравнения $\sin 2x=\sin x$, принадлежащих интервалу $(-3;3)$.

189. Решите уравнение $0{,}5+\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=0$. В ответ запишите величину наименьшего положительного корня уравнения, выраженную в градусах.

190. Решите уравнение $(\mathrm{tg}x+1)\left(2\sin\frac{x}{2}-\sqrt{2}\right)=0$. В ответ запишите отношение наименьшего положительного корня уравнения к числу π.

191. Найдите количество точек на отрезке $[0;2\pi]$, в которых функция $y=\frac{1}{\mathrm{tg}x-1}$ не определена.

192. Вычислите величину $\sin^2 x_0$, где x_0 – наименьший положительный корень уравнения $3\cos^2 x-2{,}5\sin 2x+1=0$.

193. Определите количество различных корней уравнения

$$\sin 2x\cdot\sqrt{3x-6}=0 \text{ при } -1<x<3.$$

194. Решите уравнение $2\cos^2 x+7\cos x+3=0$. В ответ запишите величину наименьшего положительного корня уравнения, выраженную в градусах.

195. Определите количество нулей функции $y=\frac{\sin 5x-\sin x}{\cos 3x}$, принадлежащих отрезку $[0;2\pi]$.

196. Найдите отношение наименьшего по модулю корня уравнения $\sin^2 x=3\sin x\cos x-2\cos^2 x$ к числу π.

Ответы

185	186	187	188	189	190
$\frac{\pm 3\pi}{4}+2\pi n, n\in Z$	$\pm\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$	$\frac{\pi n}{5}, n\in Z$	3	60	0,5
191	**192**	**193**	**194**	**195**	**196**
4	0,5	1	120	3	0,25

Часть 2. Самостоятельная работа

197. Решите уравнение $2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4}=1$.

198. Определите количество корней $2\cos^2 x=3\sin x$, принадлежащих отрезку $[-4;4]$.

199. Решите уравнение $\sin 2\pi x + \cos \pi x = 0$. В ответ запишите сумму корней уравнения, принадлежащих отрезку $[-1; 1]$.

200. Найдите количество точек на отрезке $[0; 2\pi]$, в которых функция $y = \frac{\mathrm{tg}x}{\cos 2x + 0{,}5}$ не определена.

201. Найдите отношение суммы корней уравнения $\sin x = \sqrt{3}\sin\frac{x}{2}$, принадлежащих отрезку $[0; 4\pi]$ к числу π.

202. Вычислите величину $\mathrm{ctg}x_0$, где x_0 – любой из корней уравнения

$$\sin\frac{2x-3\pi}{2} - \cos(x-\pi) = 3\sin x.$$

Занятие 11

Часть 1. Аудиторная работа

203. Найдите наименьший положительный корень уравнения (в градусах) $\cos 3x \cos x - \sin x \sin 3x = 1$.

204. Сколько корней имеет уравнение $\arccos x \cdot \cos 5x = 0$?

205. Найдите количество корней уравнения $3\cos^2 x - 4\cos x + 1 = 0$, принадлежащих отрезку $[-180°; 270°]$.

206. Решите уравнение $\sin x + \cos x + 1 = 2\sin 2x$.

207. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения (в градусах) $\sqrt{3}\cos x = \sin x$.

208. Укажите число корней уравнения $\sin^2 x + 3\cos x + 3 = 0$ на промежутке $[-3\pi; \pi]$.

209. Укажите абсциссы точек пересечения графиков функций

$$y = \frac{1}{1-\mathrm{tg}^2 2x} \text{ и } y = 1 + \cos 4x.$$

210. Найдите наименьший неотрицательный корень (в градусах)

$$\mathrm{ctg}2x \sin x = 0.$$

211. Вычислите сумму отрицательных корней уравнения

$$(\cos^3 3x + \cos 3x)\sqrt{90° + x} = 0.$$

212. Решите уравнение $\sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x = \left(\sin 2x + \frac{\cos 2x}{\sqrt{3}}\right)\cdot\sqrt{x}$.

213. Найдите наибольшее x, для которого произведение функций $f(x)$ и $g(x)$ равно функции $h(x)$, где $f(x) = \sin x$, $g(x) = \sqrt{3-x^2}$, $h(x) = |\sin x|$.

214. Решите систему уравнений $\begin{cases} \sin x + \cos x = 1; \\ \sin x \cdot \cos x = 0. \end{cases}$

Ответы

203	90	**206**	$\pi + 2\pi n;\ -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$
204	5	**207**	– 120
205	3	**208**	3

Ответы (продолжение)

209	$\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}, k \in Z$	**212**	$x=3; x=-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}, k \in N$
210	45	**213**	$\sqrt{2}$
211	– 120	**214**	$\frac{\pi}{2}+2\pi k, k \in Z; 2\pi n, n \in Z$

Часть 2. Самостоятельная работа

215. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения (в градусах) $\sin 3x \cos 5x - \cos 3x \sin 5x = 0{,}5$.

216. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения
$$\cos x \cdot \sqrt{x^2-4} = 0.$$

217. Найдите количество различных значений аргумента $x \in (0; 2\pi)$, при которых значение функции $f(x) = \cos^3 x - 2\cos^2 x$ равно значению функции $g(x) = 3\cos x$.

218. Найдите все x, для которых выполняется равенство
$$8\cos^2 x + \sin 2x + 6\sin^2 x = 6 \cdot \frac{\cos x}{\cos x}.$$

219. Пусть x_0 – наименьший положительный корень уравнения $\sin^2 x - 3\sin x \cos x + 2\cos^2 x = 0$. Найдите $\mathrm{tg} x_0$.

220. Определите количество корней уравнения $\sin x = -x^2 + 2x + 2$.

Занятие 12

Часть 1. Аудиторная работа

221. Решите уравнение $2\sin 2x - 1 = 0$.

222. Найдите решения уравнения $2\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{3} = 1$.

223. При каком наименьшем положительном x значение функции $f(x) = \sin\left(\frac{3\pi}{2}+2x\right)$ равно $-\frac{\sqrt{3}}{2}$?

224. Определите количество корней уравнения $\cos 2x + 1 = \cos x$, принадлежащих интервалу $(-5; 5)$.

225. Найдите разность между наименьшим положительным и наибольшим отрицательным корнями уравнения
$$\cos \pi x - 2\sin\frac{2\pi}{3}\sin \pi x = 0.$$

226. Решите уравнение $2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0$. В ответ запишите величину наибольшего отрицательного корня уравнения, выраженную в градусах.

227. Найдите отношение наименьшего по модулю корня уравнения $2\sin^2 x = 3\sin x \cos x + 5\cos^2 x$ к числу π.

228. Найдите наименьший положительный корень уравнения (в градусах) $\sqrt{3}\sin x = -\cos x$.

229. Во скольких точках график произведения функций $y = \sin 4x$ и $y = \arccos x$ пересекает ось Ox?

230. Укажите абсциссы точек пересечения графиков функций $y = \frac{2\cos x \cdot \sin 2x}{\mathrm{tg}x} + \cos 2x$ и $y = 2\cos x - 1$.

231. Найдите среднее арифметическое наименьшего положительного и наибольшего отрицательного корней уравнения (в градусах)

$$\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 1.$$

232. Найдите x, для которых выполняется равенство $\sin^3 x + \cos^7 x = 1$.

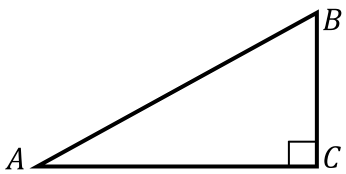
Ответы

221	$(-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z$	**227**	– 0,25
222	$\frac{\pi}{2} + 4\pi n, n \in Z$	**228**	150
223	$\frac{\pi}{12}$	**229**	4
224	6	**230**	$\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$
225	1	**231**	– 180
226	– 30	**232**	$2\pi n$; $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$

Часть 2. Самостоятельная работа

233. Больному прописано лекарство, которое нужно пить по 0,5 г 3 раза в день в течение 8 дней. В одной упаковке 8 таблеток лекарства по 0,25 г. Какого наименьшего количества упаковок хватит на весь курс лечения?

234. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $\cos A = \frac{4}{5}$. Найдите $\sin B$.



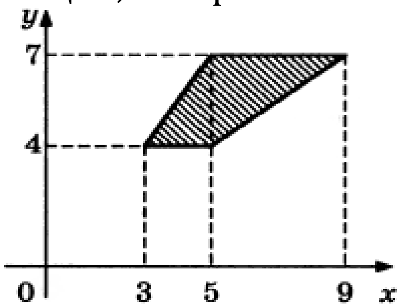
235. Определите количество корней уравнения $4\sin^2 x = \cos x + 1$, принадлежащих отрезку $[-4; 4]$.

236. Телефонная компания представляет на выбор три тарифных плана.

Тарифный план	Абонентская плата	Плата за одну минуту разговора
Повременный	Нет	0,3 рублей
Комбинированный	160 рублей за 420 минут в месяц	0,2 рублей за одну минуту сверх 420 минут в месяц
Безлимитный	255 рублей	0 рублей

Абонент выбрал наиболее дешевый тарифный план, исходя из предположения, что общая длительность телефонных разговоров составит 700 минут в месяц. Какую сумму он должен будет заплатить за месяц, если общая длительность разговоров в этом месяце действительно будет равна 700 минутам? Ответ дайте в рублях.

237. Найдите площадь трапеции, изображенной на рисунке.



238. Найдите сумму наименьшего положительного и наибольшего отрицательного корней уравнения (в градусах) $\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2}$.

239. Зависимость температуры (в кельвинах) от времени работы (в минутах) для нагревательного элемента некоторого прибора была получена экспериментально и на исследуемом интервале температур задается выражением $T(t) = T_0 + at + bt^2$, где $T_0 = 1\,350$ К, $a = -7{,}5$ К/мин, $b = 105$ К/мин^2. Известно, что при температурах нагревателя свыше 1 650 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключать. Определите (в минутах), через какое наибольшее время после начала работы нужно отключать прибор.

240. Найдите корни уравнения $4\sin x = 4x^2 - 4\pi x + \pi^2 + 4$.

241. Первая труба пропускает на 2 литра воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если резервуар объемом 783 литра она заполняет на 2 минуты быстрее, чем первая труба?

Корни, степени, логарифмы

Занятие 13

Часть 1. Аудиторная работа

242. Решите уравнение $\sqrt{3x^2 - 2} - 3x = -1$.

243. Найдите наименьший корень уравнения
$$\left(2 - \sqrt{2x - 4}\right)\left(\sqrt{3x - 11} - 2\right) = 0.$$

244. Вычислите: $\dfrac{\left(3^{\frac{1}{2}} - \sqrt{2}\right)72^{\frac{1}{2}}}{3\left(2\sqrt{6} - 16^{\frac{1}{2}}\right)\left(64^{\frac{1}{3}} + 1\right)}$.

245. Если 10% числа равны $\left(2\sqrt[3]{875} - 3\sqrt[3]{56}\right) : \sqrt[3]{7}$, то чему равно само число?

246. Найдите произведение абсцисс всех точек пересечения графика функции $y = x^2 + \sqrt{x^2 + 5}$ и прямой $y = 7$.

247. Решите уравнение $\sqrt{x + \sqrt{x - 2}} = 2$.

248. Упростите выражение $\sqrt{2x+1+x^2}+\sqrt{x-2\sqrt{1+x}+2}$ и вычислите его значение при $x=-0{,}91$.

249. Вычислите: $\frac{1}{\sqrt{3}+2}+\frac{6}{\sqrt{3}-3}+2\sqrt{3}$.

250. Найдите корень уравнения или сумму корней, если их несколько:

$$\sqrt{2x-1}=2-x.$$

251. Найдите значение x или произведение всех значений, если их несколько, при которых значение функции $y=\sqrt{x+2}+1$ равно значению функции $y=\sqrt{x-1}+2$.

252. Найдите среднее арифметическое корней уравнения

$$(x-1)\sqrt{x^2-3x}=0.$$

253. Найдите произведение корней уравнения $\sqrt{2x+3}\cdot\sqrt{7-x}=x+3$.

254. Найдите модуль разности корней уравнения

$$\left(\sqrt{x}-2\right)^2-3\left(\sqrt{x}-2\right)+2=0.$$

255. Решите уравнение $\sqrt{8+\sqrt{x^2+48}}=x$.

Ответы

242	243	244	245	246	247	248
Корней нет	4	0,2	40	– 4	3	0,79
249	**250**	**251**	**252**	**253**	**254**	**255**
– 1	1	2	1,5	– 4	7	4

Часть 2. Самостоятельная работа

256. Решите уравнение $6+\sqrt{5x-7}=2$.

257. Вычислите: $\left(3\sqrt{125}-2\sqrt{45}\right):\sqrt{5}:0{,}3$.

258. Решите уравнение $\sqrt{4-6x-x^2}-x=4$. В ответе укажите корень уравнения или сумму корней, если их несколько.

259. Найдите наибольший корень уравнения $2x-3=\sqrt{x+6}\cdot\sqrt{x-2}$.

260. Упростите выражение $\sqrt[6]{\left(2\sqrt{x}-3\right)^6}+\sqrt{25+4x+20\sqrt{x}}$ и вычислите его значение при $x=0{,}97$.

261. Упростите выражение $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)\cdot\left(\frac{a-b}{5(a+b)}\right)$.

262. Найдите среднее арифметическое корней уравнения

$$(x+2)\cdot\sqrt{x-x^2}=0.$$

263. Найдите значение выражения $3x_0-5$, где x_0 – наибольший корень уравнения $\sqrt{x+5}+3=7-\sqrt{x-3}$.

Занятие 14

Часть 1. Аудиторная работа

264. Упростите выражение $\frac{a^5+a^7+a^9}{a^{-3}+\frac{1+a^2}{a}}$ и вычислите его значение при $a = 2$.

265. Вычислите: $0{,}001^{-\frac{2}{3}} + (-3)^{-2} \cdot 27^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{1}{32}\right)^{-\frac{2}{5}} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^0$.

266. Решите уравнение $3^{4-x} = 27$.

267. Пусть x_0 – наименьший корень уравнения $121^{x^2-x} = 11^{24}$. Найдите $\frac{1}{3}x_0 + 5$.

268. Вычислите: $\left(\left(5^{\frac{7}{4}}\right)^{\frac{8}{7}} - \frac{(2^{-3})^{-2}}{32}\right) \cdot (46)^{-1}$.

269. Найдите значение выражения $\frac{\sqrt[6]{a^5\sqrt[3]{a^{-1}}}}{a^{-\frac{2}{9}}}$ при $a = 10$.

270. Решите уравнение $16 \cdot 2^{x+2} = 4^{3x-2}$.

271. Найдите значение x, при котором сумма чисел $2^x + 2$ и $2^{x-1} + 2$ равна числу $2^{x+1} - 2^2$.

272. Решите уравнение $25^{2x-x^2} - 5^{2x-x^2} = 20$.

273. Пусть x_0 – корень уравнения $\sqrt[3]{25^x} \cdot (0{,}2)^{x+2} = 1$. Найдите значение выражения $(0{,}5)^{x_0}$.

274. Решите уравнение $\frac{7}{3^{5-x}} - 3^{x-6} = 180$. Если корней больше одного, то в ответе запишите их сумму.

275. Найдите абсциссу точки пересечения графиков функций $y = 27 \cdot 3^x - 7^{x+1}$ и $y = 5 \cdot 7^x - 3^x$.

276. Найдите значение x, при котором $f(x) = 0$, если
$$f(x) = 3^{x+9} \cdot 5^{4x} - 15^{2x+6}.$$

277. Решите уравнение $2 \cdot 3^{2x} + 3^x \cdot 2^x - 6 \cdot 2^{2x} = 0$. Если корней больше одного, то в ответе запишите их произведение.

Ответы

264	**265**	**266**	**267**	**268**	**269**	**270**
256	97	1	4	0,5	10	2
271	**272**	**273**	**274**	**275**	**276**	**277**
4	1	64	8	1	3	1

Часть 2. Самостоятельная работа

278. Вычислите: $4^{\frac{3}{2}} - 18 \cdot 27^{-\frac{2}{3}} - 32^0$.

279. Решите уравнение $2^{3-x} = 16$.

280. Упростите выражение $\frac{2}{c+1} + \frac{c+11}{c^2-3c-4} + \frac{3}{c-4}$ и вычислите его значение при $c = 4{,}5$.

281. Найдите меньший из корней уравнения $5^{2x^2-3x+1}-5=0$.
282. Решите уравнение $57\cdot 7^{3x}+x\cdot 7^{3x}=0$.
283. Найдите абсциссу точки пересечения графиков функций

$$y=4\cdot 5^{4x}-7\cdot 9^{2x} \text{ и } y=3^{4x+1}-2\cdot 25^{2x}.$$

284. Найдите сумму всех значений x, при которых значение функции $y=10^{2x}+9\cdot 20^{x}-10\cdot 2^{2x}$ равно нулю.
285. Найдите сумму корней уравнения $2^x\sqrt{x}+4=4\sqrt{x}+2^x$.

Занятие 15

Часть 1. Аудиторная работа

286. Вычислите: $7^{\log_{\sqrt{7}}2+\log_{\sqrt{7}}3-\log_{\sqrt{7}}10}$.
287. Вычислите: $\frac{\log_3 7}{\log_3 5}\cdot\frac{\log_7 5}{\log_2 5}-\log_5 10$.
288. Решите уравнение $\log_2(x+1)=3$.
289. Решите уравнение $\log_3(x+1)=1+\log_3 x$.
290. Найдите наименьший корень уравнения

$$\ln(10x-x^2)=\ln(12-4x+x^2).$$

291. Известно, что $\log_b a=2$. Найдите $\log_{a^5} b^3$.
292. Решите уравнение $\lg(x^2-3)\cdot\lg x=0$.
293. Найдите значение x, при котором разность чисел $\log_3(2x+1)$ и $\log_3(x-1)$ будет равна числу $\log_3(x+3)$.
294. Найдите произведение абсцисс всех общих точек графиков функций $y=2\cdot\log_4^2 x$ и $y=1-\log_4 x$.
295. Найдите произведение корней уравнения $5^{\log_{25}9}=\log_2(x^2+2x)$.
296. Найдите наименьший корень уравнения $\lg\left(x-\frac{1}{2}\right)=\lg\left(\frac{1}{2x}\right)$.
297. Укажите наименьший корень уравнения $2\log_5\cos x=\log_{0,2}4$, принадлежащий промежутку $[-90°; 90°]$.
298. Найдите произведение корней уравнения $\sqrt{5x-x^2}\cdot\ln(x-1)=0$.
299. Найдите наименьший корень уравнения $\log_3 3^{3x+5}+5^{\log_5(7x-5)}=x^2$.

Ответы

286	287	288	289	290	291	292
0,36	– 1	7	0,5	1	0,3	2
293	**294**	**295**	**296**	**297**	**298**	**299**
2	0,5	– 8	1	– 60	10	10

Часть 2. Самостоятельная работа

300. Вычислите: $3^{\log_{\sqrt{3}}4-\log_{\sqrt{3}}2-\log_{\sqrt{3}}5}$.
301. Решите уравнение $\log_3(x+2)=3$.
302. Решите уравнение $\log_2(x+1)=1+\log_2 x$.
303. Найдите среднее арифметическое корней уравнения

$$5^{\log_3 x}\cdot 2^{\log_3 x}=100.$$

304. Найдите значение x, при котором равны числа

$$\log_2(x-3) \text{ и } \log_2(x+21)-\log_2 x.$$

305. Решите уравнение $\log_3(x^2+3x)=7^{\log_{\frac{1}{7}}4}$. В ответе запишите корень уравнения или сумму корней, если их несколько.

306. Решите уравнение $\log_{\frac{5}{3}}(x+3)+\log_{0,6}(2x-1)=1$. В ответе запишите корень уравнения или произведение его корней, если их несколько.

307. Найдите корень уравнения или сумму его корней, если их несколько: $\sqrt{2x^2+5x+2}\cdot\lg(x+1)=0$.

Занятие 16

Часть 1. Аудиторная работа

308. Решите уравнение $\sqrt{2x-1}+2=x$. Если корней несколько, то в ответе запишите их сумму.

309. Вычислите: $\frac{2^{-2}+5^0}{(0,5)^{-2}-5\cdot(-2)^{-2}+\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}}+4,75$.

310. Вычислите x, если $\log_{15}x=\log_{\frac{1}{2}}\left(1-\cos\frac{\pi}{6}\right)+\log_{\frac{1}{2}}\left(1+\cos\frac{\pi}{6}\right)$.

311. Решите уравнение $\sqrt{6+x}\cdot\sqrt{4-x}=3$. Если корней несколько, то в ответе запишите их сумму.

312. Решите уравнение $5\cdot 2^{x+2}=80$.

313. Найдите $4+\frac{1}{2}x_0$, если x_0 – наибольший корень уравнения

$$\lg(3x^2+12)=\lg(x^2-10x).$$

314. Найдите значение x, при котором произведение чисел $\sqrt{3x-15}$ и $2\sqrt{x-4}$ равно нулю.

315. Решите уравнение $6\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^x-\left(\frac{6}{5}\right)^x=5$.

316. Укажите абсциссу точки пересечения графиков функций

$$y=\frac{\log_3(x^2-4x)}{\log_4(x+1)} \text{ и } y=\frac{\log_3 5}{\log_4(x+1)}.$$

317. Найдите корень уравнения или среднее арифметическое его корней, если их несколько: $x\sqrt{8-2^x}-7\sqrt{8-2^x}=0$.

318. Найдите наибольший корень уравнения $4^{x^2+x}-15=4^{2-x-x^2}$.

319. Найдите произведение корней уравнения

$$5^{2(\log_2 x)^2}-26\cdot 5^{(\log_2 x)^2}+25=0.$$

320. Найдите сумму корней уравнения

$$(x^2-9)\cdot\sqrt{x^2+3x-10}=0.$$

321. Найдите сумму квадратов корней уравнения

$$\log^2_{\sqrt{2}}x+3\log_2 x+\log_{\frac{1}{2}}x=2.$$

Ответы

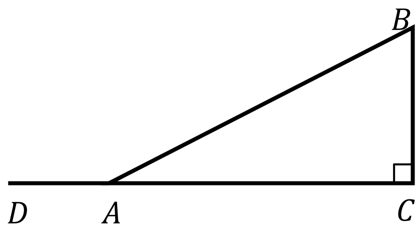
308	309	310	311	312	313	314
5	5	225	– 2	2	3	5
315	**316**	**317**	**318**	**319**	**320**	**321**
0	5	3	1	1	0	2,25

Часть 2. Самостоятельная работа

322. Железнодорожный билет для взрослого стоит 720 рублей. Стоимость билета школьника составляет 50% от стоимости билета для взрослого. Группа состоит из 15 школьников и двух взрослых. Сколько стоят билеты на всю группу?

323. Найдите корень уравнения $\log_{\frac{1}{5}}(5-x)=-2$.

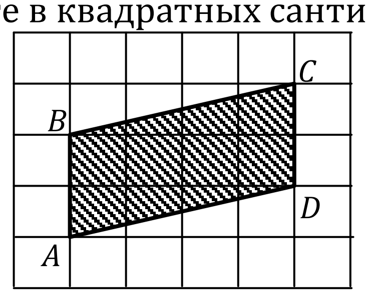
324. В треугольнике ABC угол C равен 90°, угол B равен 60°. Найдите синус угла BAD.



325. От дома до дачи можно доехать на автобусе, на электричке или на маршрутном такси, выйдя на конечной остановке. В таблице приведено время, которое нужно затратить на каждый участок пути. Какое наименьшее время потребуется на дорогу от дома до дачи? Ответ дайте в часах.

Вид транспорта	Время на дорогу от дома до остановки	Время в пути	Время на дорогу от конечной остановки до дачи
Автобус	20 минут	2 часа 10 минут	5 минут
Электричка	15 минут	1 час 55 минут	20 минут
Маршрутное такси	15 минут	1 час 40 минут	40 минут

326. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$. Размер каждой клетки 1 см ×1 см. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



327. Вычислите значение выражения $\left(7^{\log_6 7}\right)^{\log_7 6}$.

328. При температуре 0°С рельс имеет длину $l_0=20$ м. При прокладке путей между рельсами оставили зазор в 9 мм. При возрастании температуры будет происходить тепловое расширение рельса и его длина будет меняться по закону $l(t^\circ) = l_0(1 + \alpha \cdot t^\circ)$, где $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}$ $(^\circ\mathrm{C})^{-1}$ – коэффициент теплового расширения, t° – температура (в градусах Цельсия). При какой минимальной температуре между рельсами исчезнет зазор? Ответ выразите в градусах Цельсия.

329. Два автомобиля отправляются в 420-километровый пробег. Первый едет со скоростью на 10 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 1 час раньше второго. Найти скорость автомобиля, пришедшего к финишу вторым.

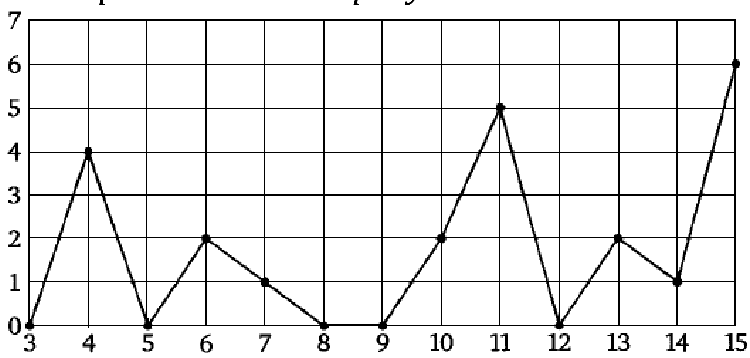
330. Найдите все значения x, при которых значение функции $f(x) = 2 \cdot 3^x + 9 \cdot 4^x$ равно значению функции $g(x) = 12^x + 18$.

Функции. Производная

Занятие 17

Часть 1. Аудиторная работа

На рисунке жирными точками показано суточное количество осадков, выпадавших в Казани с 3 по 15 февраля 1909 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали – количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией.



331. Определите по рисунку, сколько дней из данного периода не выпадало осадков.

332. Определите по рисунку, сколько дней из данного периода выпадало менее 3 миллиметров осадков.

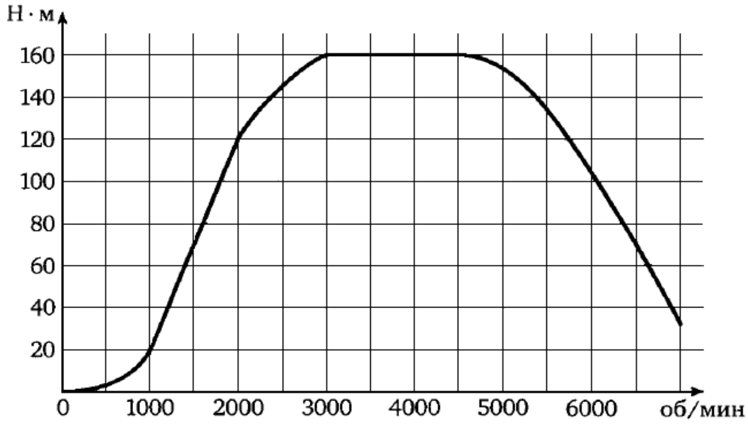
333. Определите по рисунку, сколько дней из данного периода выпадало более 3 миллиметров осадков.

334. Определите по рисунку, какого числа впервые за данный период выпало 5 миллиметров осадков.

335. Определите по рисунку, какого числа выпало наибольшее количество осадков.

336. Определите по рисунку, какое наибольшее количество осадков выпало за данный период. Ответ дайте в миллиметрах.

На графике изображена зависимость крутящего момента автомобильного двигателя от числа его оборотов. На оси абсцисс откладывается число оборотов в минуту, по оси ординат – крутящий момент в Н·м.



337. Определите по графику, при каком количестве оборотов в минуту крутящийся момент становится равен 20 Н·м.

338. Определите по графику, чему равен максимальный крутящийся момент двигателя (в Н·м).

339. Чтобы преодолеть глубокий снег, водителю требуется максимальный крутящийся момент двигателя. Какое наименьшее число оборотов в минуту должен поддерживать водитель этой машины?

На рисунке жирными точками показана цена никеля на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 6 по 20 мая 2009 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали – цена тонны никеля в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией.

340. Определите по рисунку, какого числа цена никеля на момент закрытия торгов была наименьшей за данный период.

341. Определите по рисунку, какой была наименьшая цена никеля на момент закрытия торгов за данный период (в долларах США за тонну).

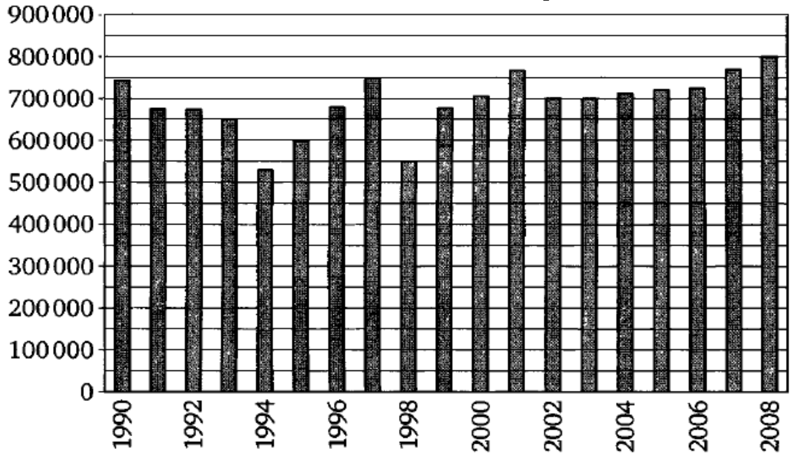
342. Определите по рисунку, какого числа цена никеля на момент закрытия торгов была наибольшей за данный период.

343. Определите по рисунку, какой была наибольшая цена никеля на момент закрытия торгов за данный период (в долларах США за тонну).

344. Пользуясь рисунком, найдите разность между наибольшей и наименьшей ценой никеля на момент закрытия торгов в указанный период (в долларах США за тонну).

345. Определите, какой была наименьшая цена никеля на момент закрытия торгов в период с 7 по 15 мая (в долларах США за тонну).

На диаграмме показано, сколько автомобилей ВАЗ было произведено за каждый год, с 1990-го по 2008-й. По горизонтали указываются года, по вертикали – количество автомобилей, произведенных за год.



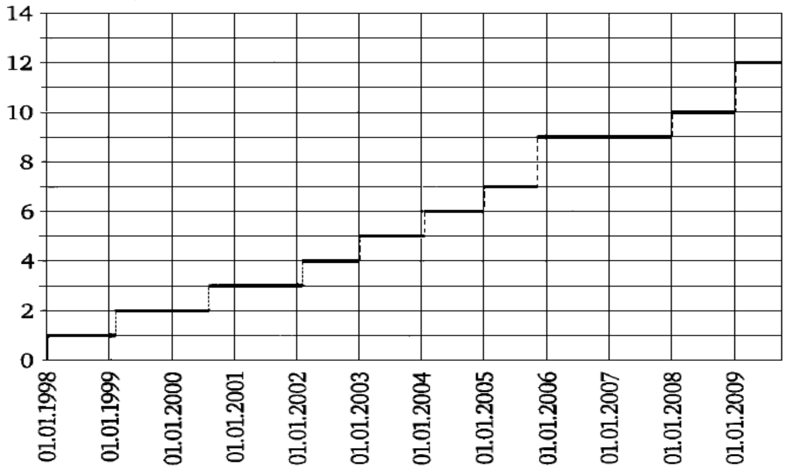
346. Определите по диаграмме, в каком году было произведено наименьшее количество автомобилей.

347. Определите по диаграмме, какое наибольшее количество автомобилей в год было произведено за этот период.

348. Определите по диаграмме, какое наибольшее количество автомобилей в год было произведено в период с 1990 по 2000 год.

349. Определите по диаграмме, сколько автомобилей было произведено в 1998 году.

На рисунке показано изменение стоимости билета на одну поездку в Самарском метрополитене в период с 1 января 1998 по 1 августа 2009 года. По горизонтали указаны даты, по вертикали – стоимость поездки в рублях.



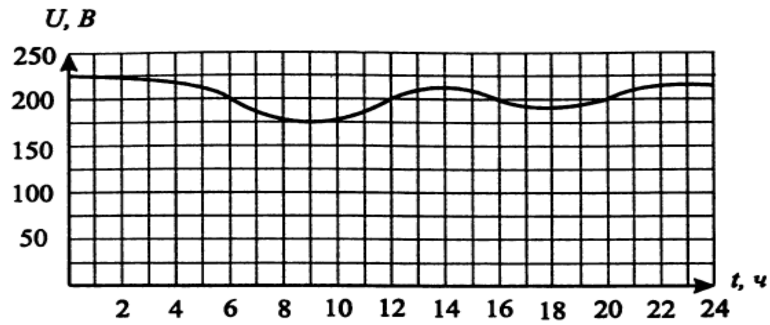
350. Определите по рисунку стоимость одной поездки в Самарском метрополитене в середине 2003 года.

351. Определите по рисунку, во сколько раз увеличилась стоимость поездки на метро в Самаре с середины 2001 до середины 2009 года.

352. Определите по рисунку, во сколько раз увеличилась стоимость поездки на метро в Самаре с середины 1998 до середины 2007 года.

353. Определите по рисунку, на сколько рублей повысилась стоимость поездки в Самарском метрополитене в конце 2005 года.

354. В загородном доме энергосистема оборудована блоком автоматического управления. Автомат включает трансформатор, когда напряжение в сети ниже 200 Вольт, и отключает его, когда напряжение повышается до 200 Вольт. На рисунке показано изменение напряжения в сети в течение суток. Определите, сколько часов за эти сутки напряжение было отключено. По горизонтальной оси отложено время (в ч), по вертикальной – напряжение (в

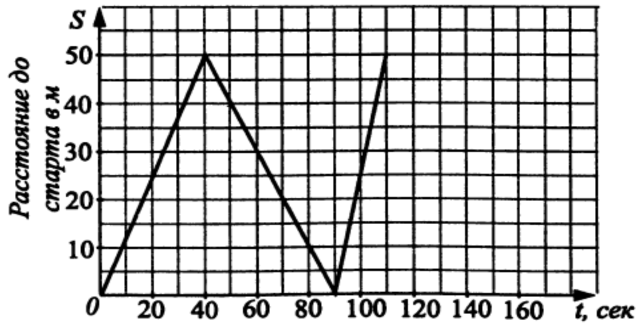


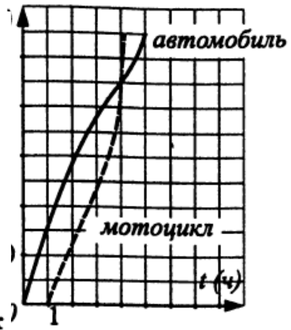
В).

355. На тренировке в пятидесятиметровом бассейне спортсмен проплывает 150-метровую дистанцию. На рисунке показан график изменения расстояния между пловцом и точкой старта во время заплыва. Используя график, ответьте на вопрос: на какой по счету пятидесятиметровке пловец плыл медленнее всего?

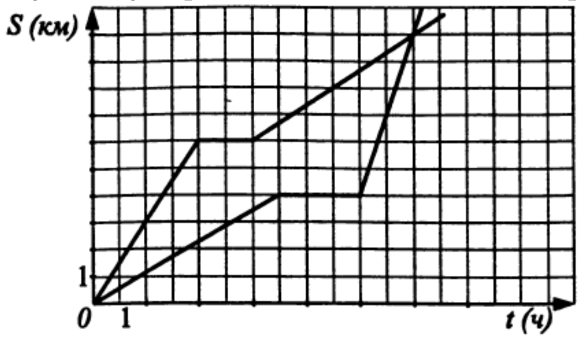
356. Из пункта *А* по одной дороге в одном направлении выехали автомобиль и мотоцикл. На рисунке показана зависимость пройденного пути от времени для них. По вертикальной оси отложен путь (в километрах), по горизонтальной – время (в часах). Определите, через сколько часов после начала движения автомобиля мотоцикл и автомобиль поравнялись.

357. Из пункта *А* по одной и той же дороге одновременно вышли два пут-

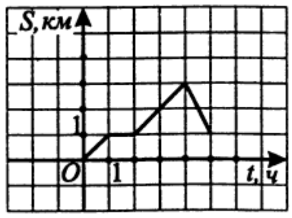




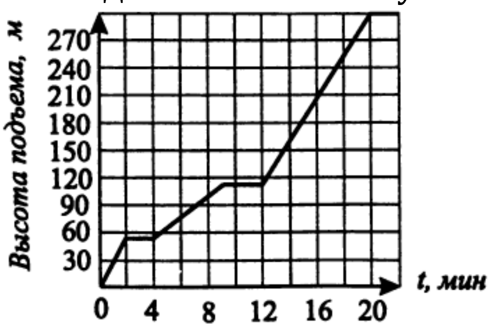
ника. На рисунке показана зависимость пройденного пути от времени для них. По вертикальной оси отложен путь (в километрах), по горизонтальной – время (в часах). Сколько километров пришлось пройти каждому путнику, прежде чем они снова поравнялись?



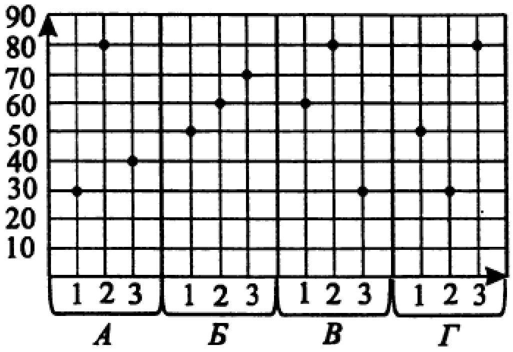
358. На рисунке изображен график зависимости расстояния s (в км), пройденного автобусом, от времени t (в ч). Найдите длину пути (в км), пройденного автобусом за 5 ч.



359. При подъеме на Эйфелеву башню туристы обозревают Париж с трех смотровых площадок, расположенных на разной высоте. Пользуясь графиком, определите, сколько ступеней содержат лестницы при подъеме от земли до платформы третьей площадки, если принять, что в среднем туристы поднимались на 2 ступеньки в секунду.



360. При проведении тестирования коэффициентом успеха ученика называют отношение среднего балла этого ученика по разным видам заданий к среднему результату всех участников тестирования. На рисунке изображен график числа балла по трем видам заданий (1, 2, 3) четырех учеников (А, Б, В, Г). Пользуясь графиком, укажите значение наибольшего коэффициента успеха, если средний результат тестирования составляет 50 баллов. По горизонтали приведены коды участников тестирования (А, Б, В, Г), по вертикали – число баллов по одному из заданий.



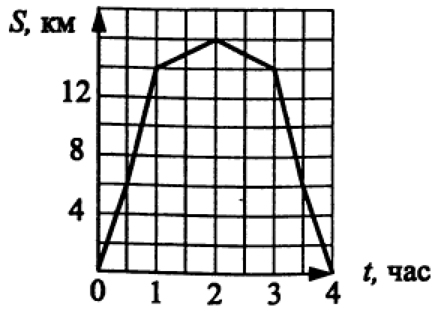
Ответы

331	332	333	334	335	336	337	338	339	340
5	10	3	11	15	6	1 000	160	3 000	18
341	**342**	**343**	**344**	**345**	**346**	**347**	**348**	**349**	**350**
12 000	12	13 400	1 400	12 200	1 994	800 000	750 000	550 000	5
351	**352**	**353**	**354**	**355**	**356**	**357**	**358**	**359**	**360**
4	9	2	14	2	4	10	5	1 800	1,2

Часть 2. Самостоятельная работа

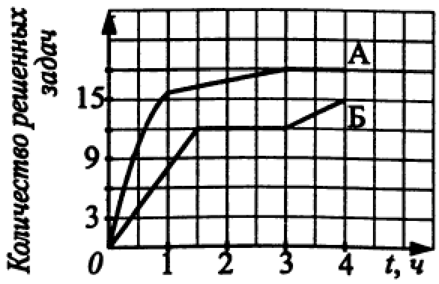
361. Велосипедист выехал из одного населенного пункта в другой и вернулся обратно. На рисунке изображен график движения велосипедиста. Определите его среднюю скорость за первые 3 часа движения.

1) 6 км/ч, 2) 2 км/ч, 3) 8 км/ч, 4) 4 км/ч.



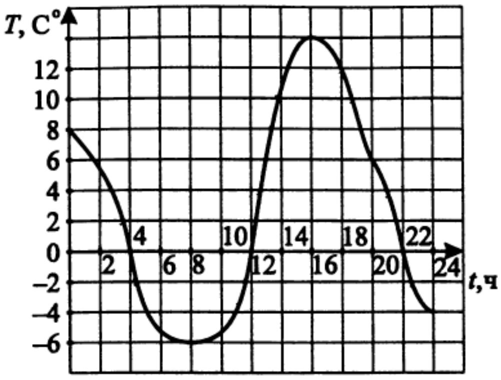
362. На рисунке изображены графики зависимости от времени количества решенных задач на экзамене для учеников А и Б. Кто решил больше задач за последний час и на сколько больше?

1) А, на 1, 2) А, на 6, 3) Б, на 3, 4) Б, на 6.



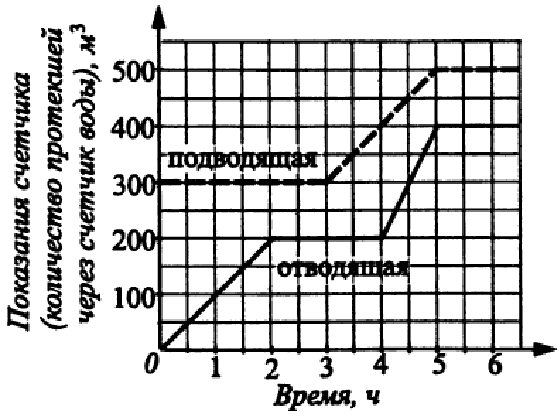
363. График показывает, как изменялась температура воздуха в течение суток. Используя график, определите промежутки времени в течение суток, в которые температура воздуха понижалась.

1) $(-8;\ 8)$, 2) $(-6;\ 14)$, 3) $(0;\ 8) \cup (16;\ 24)$, 4) $(4;\ 12) \cup (22;\ 24)$.



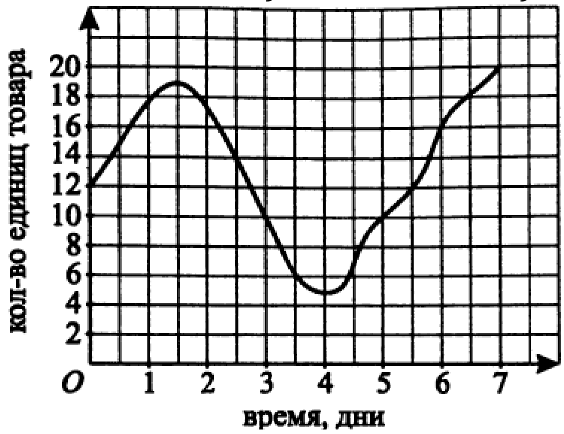
364. В бассейне на подводящей и отводящей трубах установили счетчики. На рисунке показаны графики зависимости от времени показаний этих счетчиков. В начальный момент воды в бассейне было 300 м³. Определите, в какие моменты времени в бассейне было 200 м³ воды.

1) в 1 час, 2) в 1 час и в 4 часа, 3) в 2 часа и 4 часа, 4) в 5 часов.



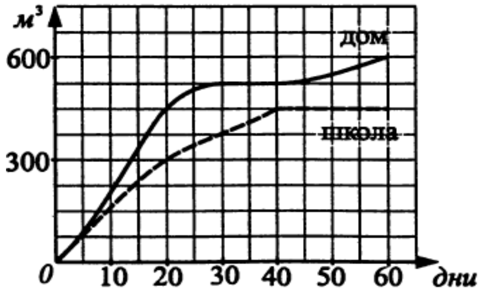
365. На рисунке показан график продаж товара за неделю. Когда количество продаж упало до 10 единиц товара в день, на товар установили скидку до тех пор, пока количество продаж не достигло 16 единиц товара в день. Определите, сколько дней действовала скидка.

1) 5, 2) 2, 3) 3, 4) 4.

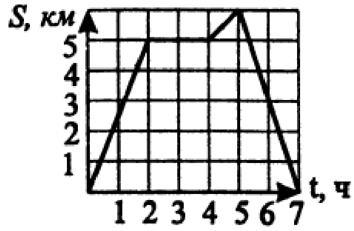


366. На рисунке представлены графики показаний счетчиков расхода горячей воды в течение 60 дней школой и жилым домом. Какой объект больше израсходовал горячей воды в период с 20-го по 40-й день включительно и на сколько:

1) школа, на 100 м^3, 2) школа, на 75 м^3,
3) дом, на 150 м^3, 4) дом, на 300 м^3?

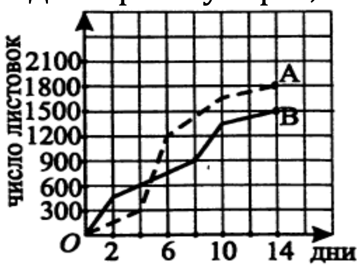


367. На рисунке изображен график движения школьников в походе. По горизонтальной оси отложено время движения (в ч), по вертикальной – расстояние (в км). Укажите, пользуясь графиком, какое расстояние было пройдено за последние 3 часа похода.

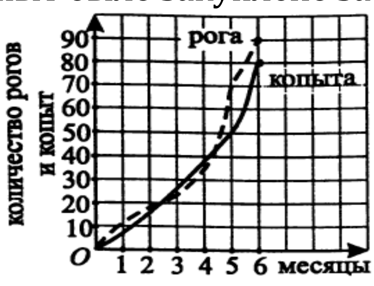


1) 1, 2) 5, 3) 6, 4) 7.

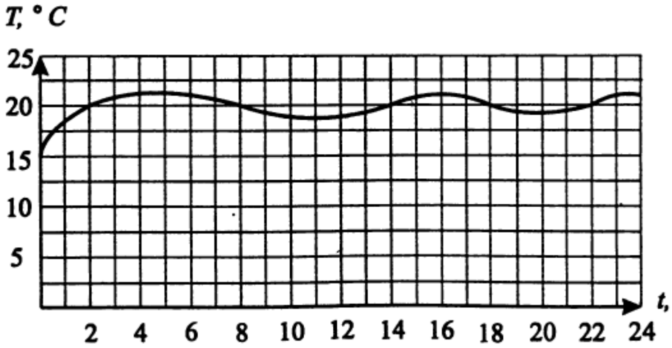
368. Двое промоутеров раздавали рекламные листовки. На графиках показано, сколько листовок раздавал каждый промоутер в течение двух недель. По горизонтальной оси откладываются дни работы промоутеров; по вертикальной – число листовок, розданных за время, прошедшее от начала акции до текущего дня. На сколько листовок больше раздал промоутер *A*, чем *B,* за 14 дней?



369. Фирма «Рога и копыта» вела закупку рогов и копыт. На графиках показано, как велась закупка в течение полугода. По горизонтальной оси откладывается время, прошедшее с начала закупок, в месяцах, по вертикальной – количество рогов и копыт, закупленных за это время. Сколько рогов и копыт было закуплено за первые пять месяцев?

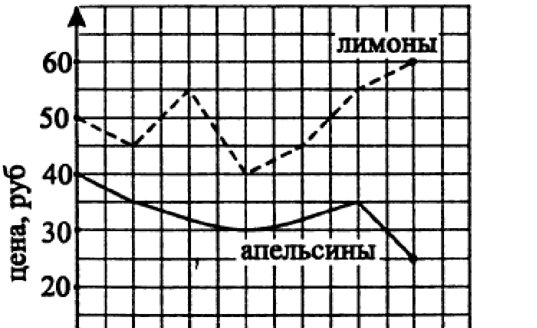


370. В комнате установлена сплит-система. На рисунке показан график работы сплит-системы в течение суток. Если температура воздуха в комнате становится выше 20°С, то система включается автоматически и работает до тех пор, пока температура станет равна 20°С. Определите, сколько часов в сутки температура воздуха в комнате была выше 20°С. По горизонтальной оси откладывается время (в ч), по вертикальной – температура воздуха (в °С).

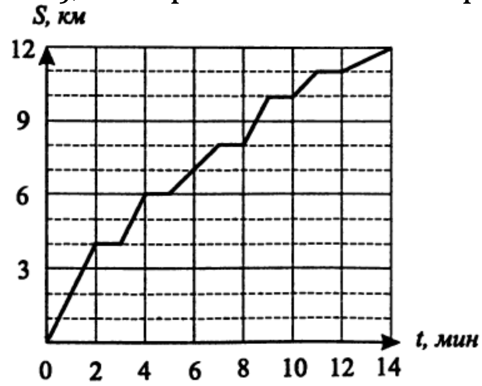


371. Из пунктов A и B по одной дороге навстречу друг другу шли два пешехода. Первый шел из пункта A в пункт B, а второй – из B в A. На рисунке приводятся графики их движения. Через сколько часов после начала движения первого пешехода он находился на расстоянии от A вдвое большем, чем второй пешеход от A?

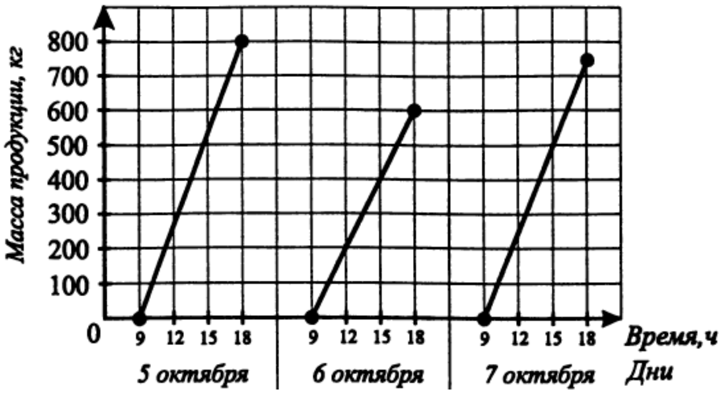
372. На графике показаны закупочные цены апельсинов и лимонов в течение полугода. По горизонтальной оси откладываются месяцы с начала года, по вертикальной – цена в рублях за 1 кг. Сколько килограммов апельсинов можно было купить на 300 руб. тогда, когда 1 кг лимонов стоил дешевле всего?



373. На рисунке изображен график движения электропоезда в метро. Пользуясь графиком, определите среднюю скорость движения электропоезда (в км/ч) за первые 10 мин. По горизонтальной оси откладывается время (в мин), по вертикальной оси – расстояние (в км).



374. На графике показан выпуск продукции на медицинском предприятии с 5 по 7 октября. На оси абсцисс отмечается время суток в часах, на оси ординат – масса продукции в килограммах. Определите по графику массу продукции, выпущенную предприятием 7 октября к 15 часам.

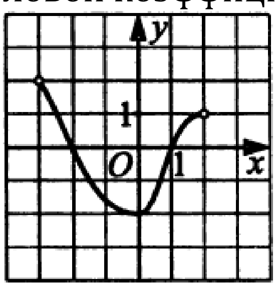


Занятие 18

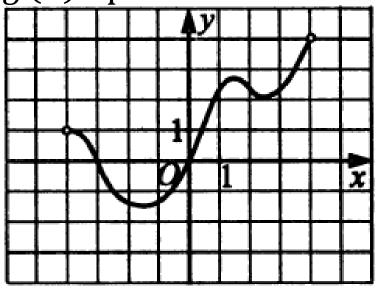
Часть 1. Аудиторная работа

375. Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции $y = 2x^3 - x$ в точке $x_0 = -2$.

376. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $[-3; 2]$. На рисунке изображен график ее производной. Определите наибольшую длину промежутка, на котором касательная к графику функции имеет отрицательный угловой коэффициент.

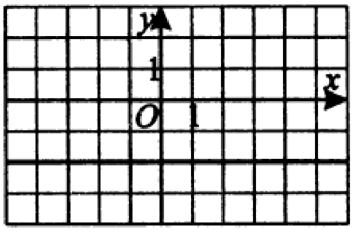


377. На рисунке изображен график производной функции $y = g(x)$, которая определена на отрезке $[-4; 4]$. Определите длину наибольшего промежутка, на котором тангенс угла наклона касательной к графику функции $y = g(x)$ принимает положительные значения.

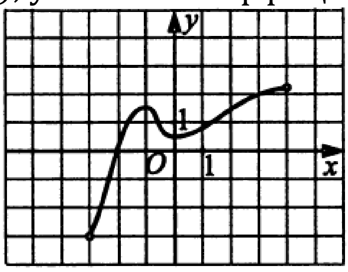


378. Найдите угол (в градусах), образованный положительным направлением оси абсцисс и касательной к графику функции $y = 3e^x - 2x$ в точке $x_0 = 0$.

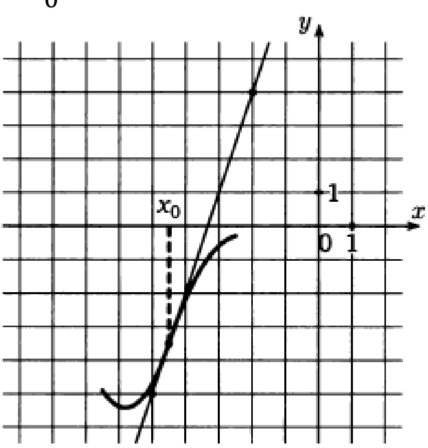
379. На рисунке изображена прямая, которая является касательной к графику функции $y = h(x)$ в точке x_0. Определите $h'(x_0)$.



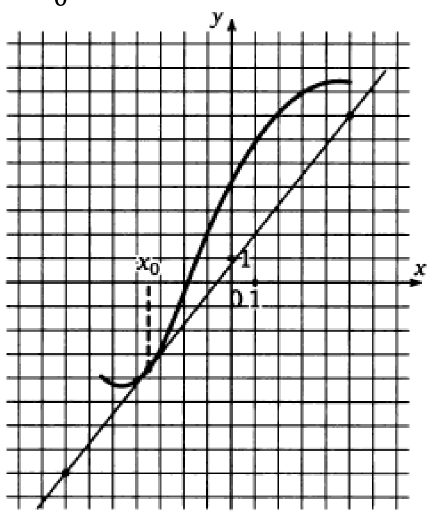
380. На рисунке изображен график производной функции $y = f(x)$ на промежутке $(-3; 4)$. Определите количество касательных к графику функции $y = f(x)$, угловой коэффициент которых равен 1.



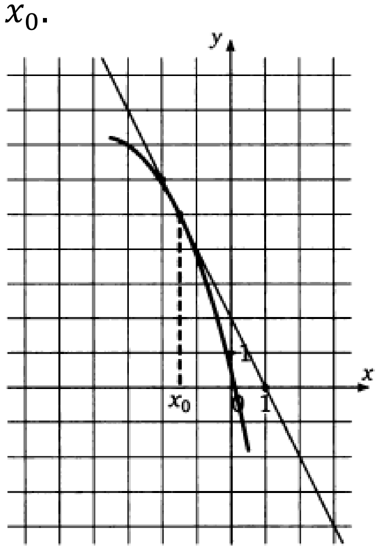
381. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



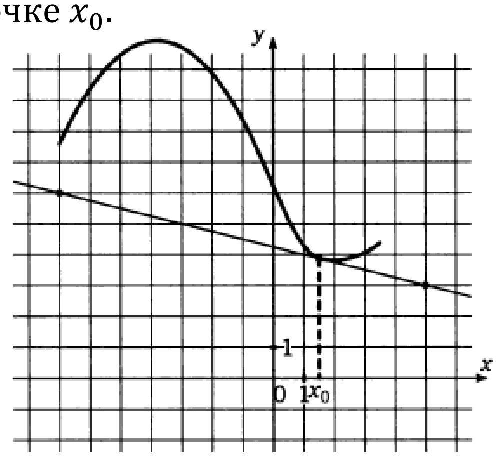
382. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



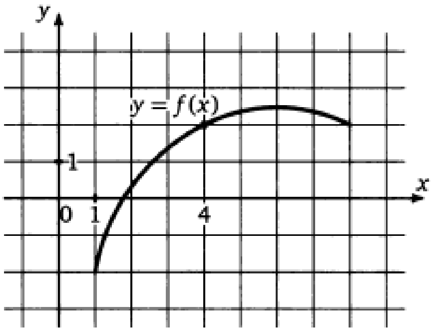
383. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



384. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



385. На рисунке изображен график функции $f(x)$. Касательная к этому графику, проведенная в точке 4, проходит через начало координат. Найдите $f'(4)$.



386. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-1; 13)$. Определите количество целых чисел x_i, таких, что $f'(x_i)$ отрицательно.

387. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-1; 13)$. Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.

388. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-1; 13)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = -10$.

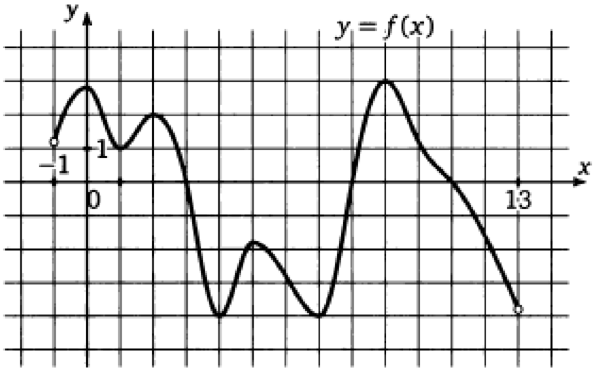
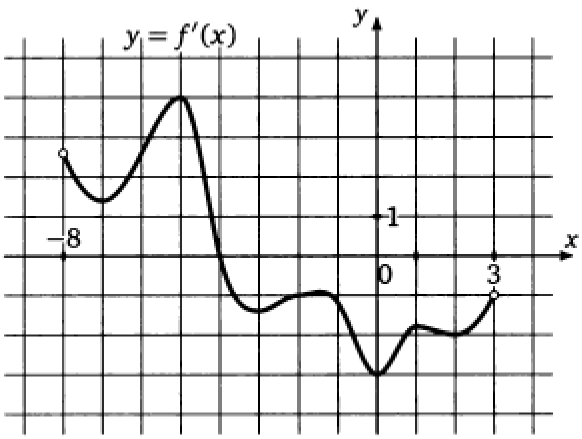
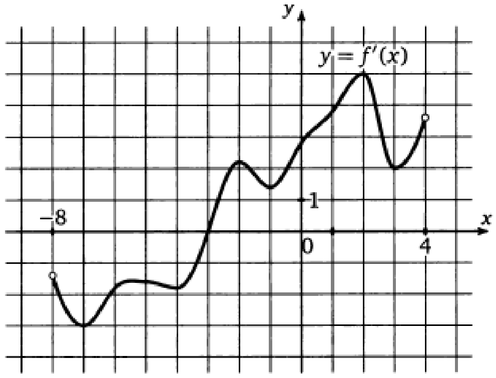


Рисунок к задачам № 386, 387, 388

389. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-8; 3)$. В какой точке отрезка $[-3; 2]$ $f(x)$ принимает наибольшее значение?



390. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-8; 4)$. Найдите точку экстремума функции $f(x)$, принадлежащую отрезку $[-4; -1]$.



391. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-8; 4)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-7; -1]$.

392. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-8; 4)$. Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых чисел, входящих в эти промежутки.

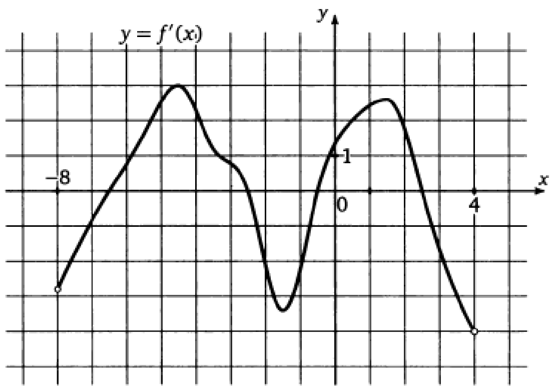


Рисунок к задачам № 391, 392

393. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-2; 16)$. Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.

394. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-2; 16)$. Найдите количество таких чисел x_i, что касательная к графику функции $f(x)$ в точке x_i параллельна прямой $y = -3x + 6$ или совпадает с ней.

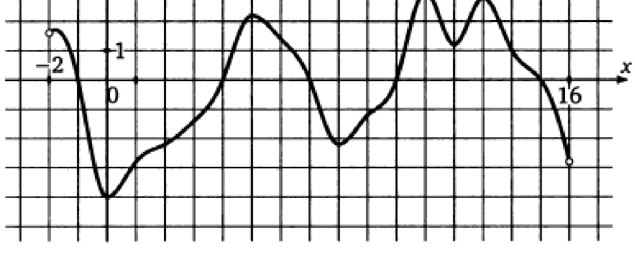
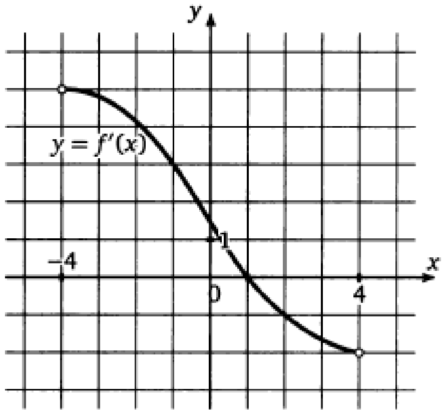


Рисунок к задачам № 393, 394

395. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-4; 4)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = 3x + 5$ или совпадает с ней.



396. Касательная к графику функции $y = \ln x + x$ параллельна прямой $y = 2x - 3$. Определите абсциссу точки касания.

397. Прямая $y = 8x + 9$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 5x + 6$. Найдите абсциссу точки касания.

398. Прямая $y = 5x + 14$ является касательной к графику функции $y = x^3 - 4x^2 + 9x + 14$. Найдите абсциссу точки касания.

399. Прямая $y = -5x + 8$ касается графика функции $y = 28x^2 + bx + 15$. Найдите b, учитывая, что абсцисса точки касания больше 0.

400. Под каким углом пересекаются касательные к графикам функций $y = \cos x$ в точке $x_0 = \frac{3\pi}{2}$ и $y = -\sqrt{3}\cos x$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{2}$ (в гадусах)?

401. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = t^3 - 6t^2 - 18t + 6$, где x – расстояние от точки отсчета в метрах, t – время в секундах, измеренное с начала движения. Найдите ее скорость в момент времени $t = 5$ с.

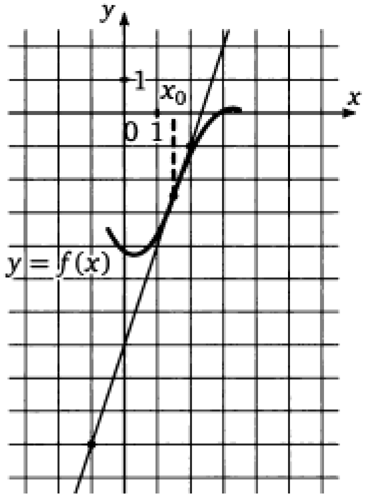
402. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = t^3 - t^2 - 12t + 18$, где x – расстояние от точки отсчета в метрах, t – время в секундах, измеренное с начала движения. В какой момент времени ее скорость была равна 9 м/с?

Ответы

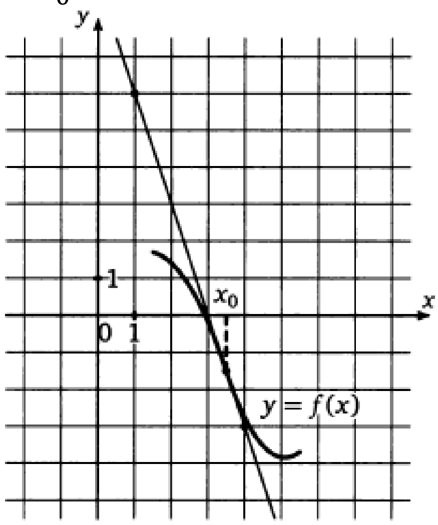
375	**376**	**377**	**378**	**379**	**380**	**381**
23	3	4	45	0	3	3
382	**383**	**384**	**385**	**386**	**387**	**388**
1,25	– 2	– 0,25	0,5	5	7	7
389	**390**	**391**	**392**	**393**	**394**	**395**
– 3	– 3	1	– 7	5	2	– 1
396	**397**	**398**	**399**	**400**	**401**	**402**
1	1,5	2	– 33	15	– 3	3

Часть 2. Самостоятельная работа

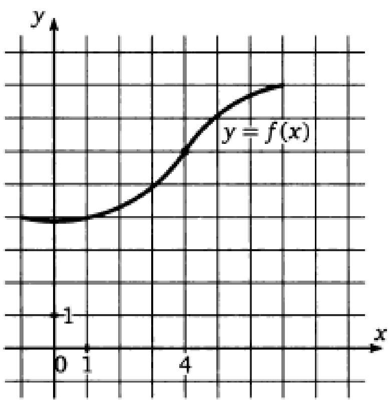
403. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



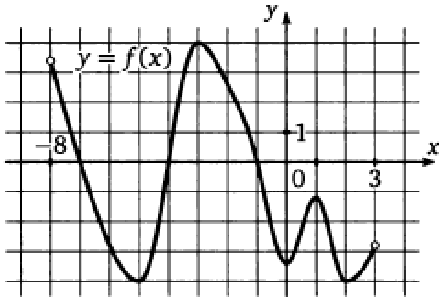
404. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



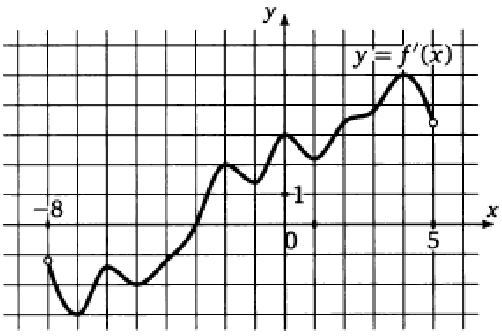
405. На рисунке изображен график функции $f(x)$. Касательная к этому графику, проведенная в точке 4, проходит через начало координат. Найдите $f'(4)$.



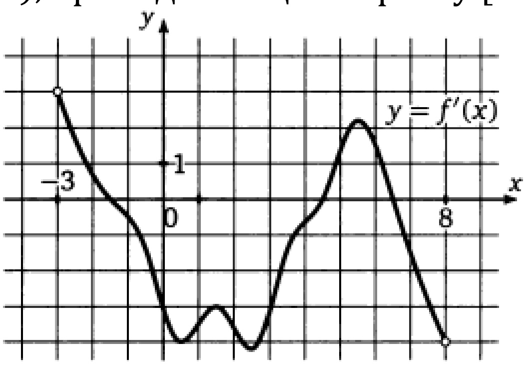
406. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-8; 3)$. Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.



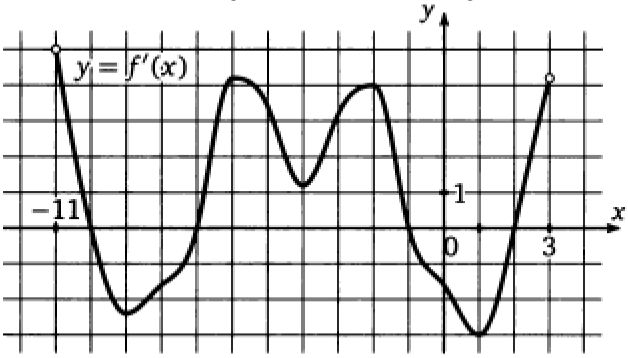
407. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-8; 5)$. В какой точке отрезка $[0; 4]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?



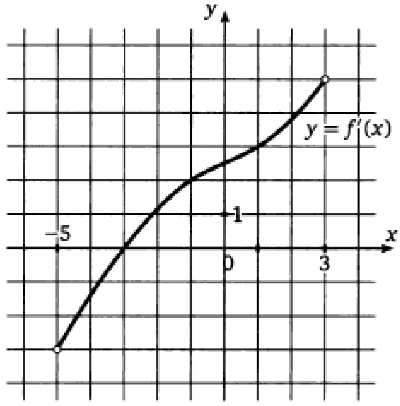
408. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-3; 8)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-2; 7]$.



409. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-11; 3)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.



410. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-5; 3)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = 2x + 7$ или совпадает с ней.



411. Прямая $y = 2x + 37$ является касательной к графику функции $y = x^3 + 3x^2 - 7x + 10$. Найдите абсциссу точки касания.

412. Под каким углом (в градусах) пересекаются касательные к графикам функций $y = \frac{3x+3}{x}$ в точке $x_0 = 2$ и $y = \frac{x^3+3}{9}$ в точке $x_0 = -2$?

413. Прямая $y = 3x + 1$ является касательной к графику функции $y = ax^2 + 2x + 3$. Найдите a.

414. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = \frac{1}{2}t^3 - 3t^2 + 2t$, где x – расстояние от точки отсчета в метрах, t – время в секундах, измеренное с начала движения. Найдите ее скорость в момент времени $t = 6$ с.

Занятие 19

Часть 1. Аудиторная работа

415. Найдите точку максимума функции $y = 5 + 4x - \frac{x^3}{3}$.

416. Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 - 6x^2$ на отрезке $[-3; 3]$.

417. Найдите точку минимума функции $y = \frac{49}{x} + x + 49$.

418. Найдите точку максимума функции $y = 5 + 18x - 4x^{\frac{3}{2}}$.

419. Найдите наибольшее значение функции $y = 6x - x\sqrt{x} + 1$ на отрезке $[9; 25]$.

420. Найдите точку минимума функции $y = 5\sin x - 5(x - 1)\cos x + 4$, принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

421. Найдите точку максимума функции $y = (x^2 - 17x + 17)e^{7-x}$.

422. Найдите наибольшее значение функции $y = 4 + (x - 5)e^{6-x}$ на отрезке $[1; 8]$.

423. Найдите точку минимума функции $y = x - 7\ln x + 6$.

424. Найдите стационарные точки функции $h(x) = 5 \cdot 3^x - 45x \ln 3 + \sqrt{3}$.

425. Найдите значение функции $y = 2x^3 - 3x^2\left(\sqrt[4]{x-3}\right)^4 + 21x$ в точке максимума.

426. Найдите значения функции $f(x) = x^3 \cdot e^{x+3}$ в точках экстремума.

427. Найдите точки экстремума функции $y = f'(x)$, если

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{16}{x} + \ln 3.$$

428. Найдите целые точки экстремума функции

$$y(x) = (x-2)^3(x-3)^2 + \sqrt[3]{7}.$$

Ответы

415	416	417	418	419	420	421
2	0	7	9	33	1	17
422	**423**	**424**	**425**	**426**	**427**	**428**
5	7	2	245	– 27	– 2; 2	3

Часть 2. Самостоятельная работа

429. Найдите экстремумы функции $y = x^3 - 13x + 5 + \left(\sqrt{x-1}\right)^2$.

430. Найдите наибольшее значение функции $y = 9x^2 - x^3$ на отрезке $[1; 10]$.

431. Найдите точки максимума функции

$$f(x) = -\frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{x^4 - 18x^2 + 81}{x^2 - 9}.$$

432. Найдите наименьшее значение функции $y = x\sqrt{x} - 12x + 11$ на отрезке $[36; 81]$.

433. Найдите точку минимума функции $y = 2\cos x + \sin x - x\cos x$, принадлежащую промежутку $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

434. Найдите точку максимума функции $y = (x+8)e^{8-x}$.

435. Найдите значение функции $f(x)$ в точке максимума:

$$f(x) = \frac{x^6 - 64}{x^3 + 8} - 6x^2 - 15x.$$

436. Найдите наибольшее значение функции $y = \ln(x+3)^3 - 3x$ на отрезке $[-2{,}5; 2{,}5]$.

437. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = 2\sin x + \sin 2x$ на промежутке $[0; \pi]$.

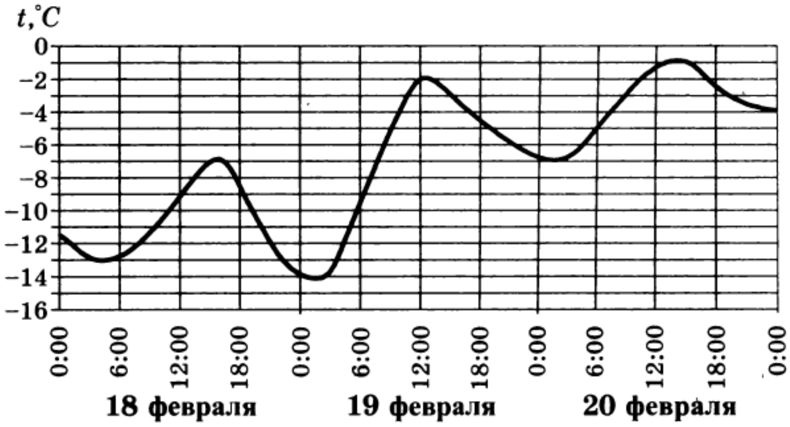
438. Найдите наибольшее значение функции $y = \frac{\ln(2x-3)}{2} + 3x - x^2$.

Занятие 20

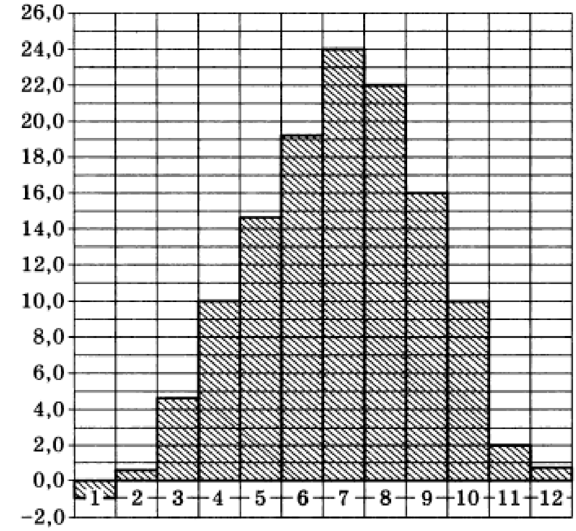
Часть 1. Аудиторная работа

439. На рисунке показано изменение температуры воздуха на протяжении трех суток. По горизонтали указывается дата и время суток, по вертикали – значение температуры в градусах Цельсия.

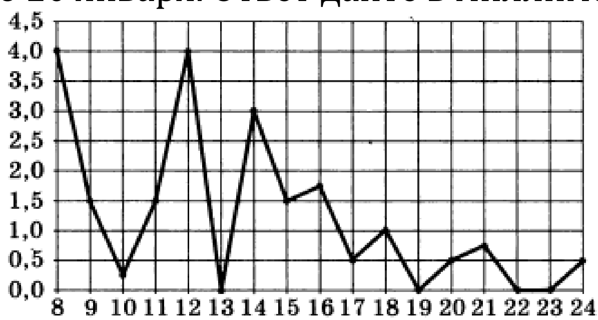
Определите по рисунку наименьшую температуру воздуха 20 февраля. Ответ дайте в градусах Цельсия.



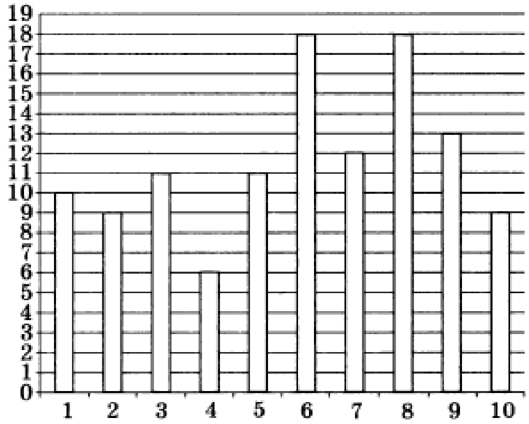
440. На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Симферополе за каждый месяц 1988 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали – температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, сколько было месяцев, когда среднемесячная температура не превышала 6 градусов Цельсия.



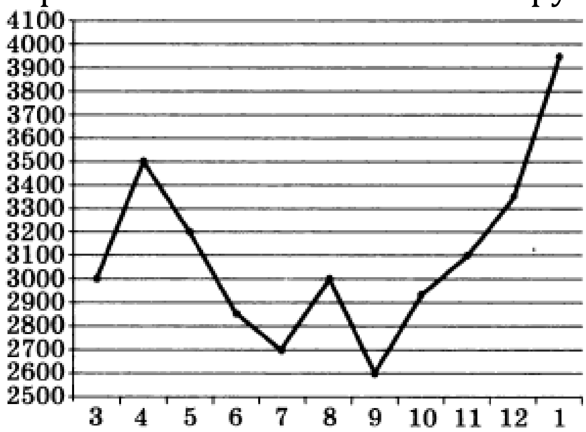
441. На рисунке жирными точками показано суточное количество осадков, выпавших в Томске с 8 по 24 января 2005 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали – количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какое наибольшее количество осадков выпало в период с 13 по 20 января. Ответ дайте в миллиметрах.



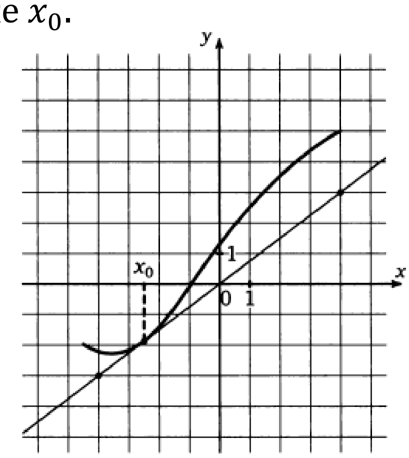
442. На диаграмме изображено количество вспышек на Солнце за первые 10 дней ноября 2001 года. Определите по рисунку, во сколько раз наибольшее число вспышек за указанный период больше наименьшего.



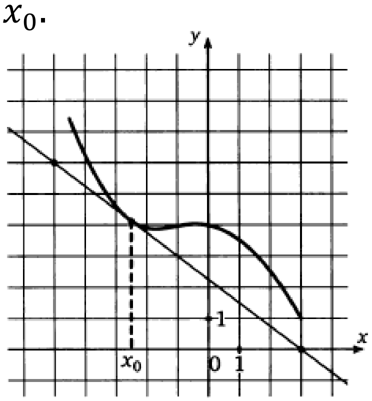
443. На рисунке жирными точками показана цена потребительской корзины в магазине «Покупка» во все месяцы с марта 2009 года по январь 2010 года. По горизонтали указаны номера месяцев, по вертикали – стоимость потребительской корзины в рублях. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, сколько месяцев из указанного периода потребительская корзина стоила не менее 3 000 рублей.



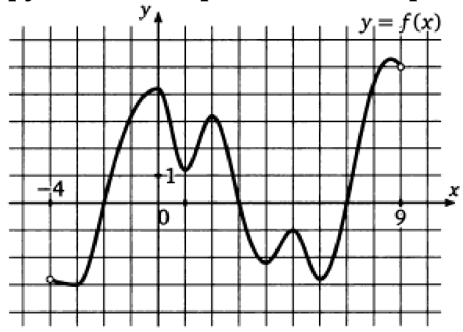
444. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



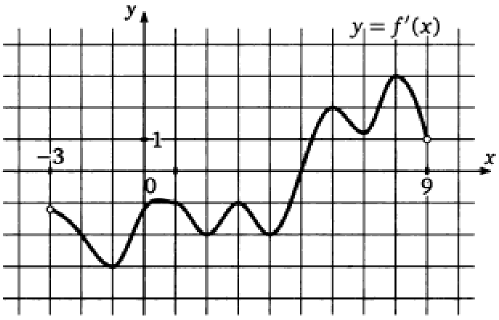
445. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



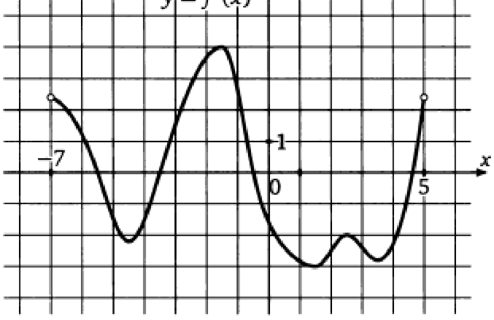
446. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-4; 9)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = 14$.



447. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-3; 9)$. В какой точке отрезка $[-2; 3]$ $f(x)$ принимает наибольшее значение?



448. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-7; 5)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-6; -1]$.



449. Прямая $y = 5 - x$ является касательной к графику функции $y = ax^2 + 5x + 3$. Найдите a.

450. Найдите точку максимума функции $y = x^3 - 5x^2 + 7x - 5$.

451. Найдите наибольшее значение функции $y = \frac{x^2+25}{x}$ на отрезке $[-10; -1]$.

452. Найдите наибольшее значение функции $y = (27 - x)\sqrt{x}$ на отрезке $[1; 16]$.

453. Найдите точку максимума функции $y = 3 - 4\sin x - (5 - 4x)\cos x$, принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

454. Найдите наибольшее значение функции $y = 3\mathrm{tg}x - 3x + 5$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; 0\right]$.

455. Найдите точку максимума функции $y = \ln(x + 2) - x + 3$.

456. Найдите точку минимума функции $y = (x + 5)e^{x-5}$.

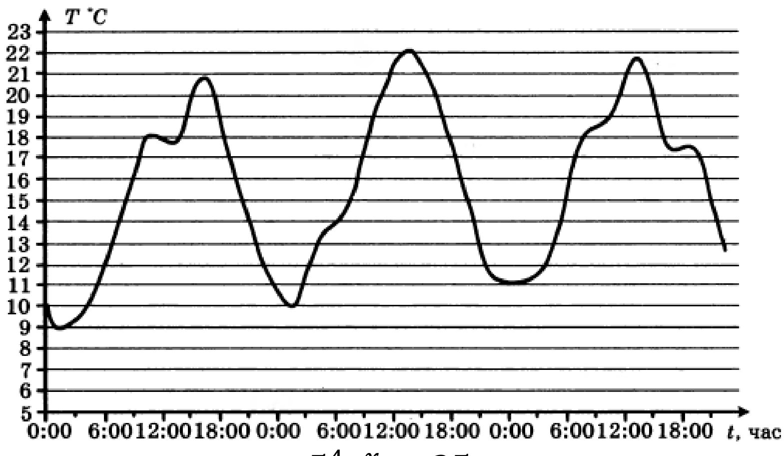
Ответы

439	440	441	442	443	444	445	446	447
– 7	5	3	3	7	0,75	– 0,75	8	-2
448	**449**	**450**	**451**	**452**	**453**	**454**	**455**	**456**
1	– 4,5	1	– 10	54	1,25	5	– 1	– 6

Часть 2. Самостоятельная работа

457. Сырок стоит 5 рублей 40 копеек. Какое наибольшее количество сырков можно купить на 40 рублей?

458. На графике показано изменение температуры воздуха в некотором населенном пункте на протяжении трех суток, начиная с 0 часов субботы. На оси абсцисс отмечается время суток в часах, на оси ординат – значение температуры в градусах. Определите по графику наименьшую температуру воздуха в ночь с воскресенья на понедельник.



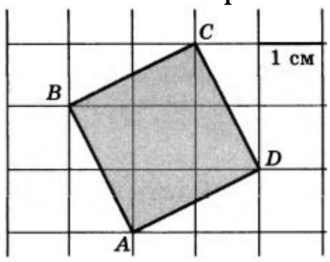
459. Найдите корень уравнения $5^{4-x} = 25$.

460. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $\sin A = \frac{\sqrt{21}}{5}$. Найдите $\sin B$.

461. В магазине одежды объявлена акция: если покупатель приобретает товар на сумму свыше 5 000 рублей, он получает скидку на следующую покупку в размере 10%. Если покупатель участвует в акции, он теряет право возвратить товар в магазин. Покупатель В. хочет приобрести куртку ценой 4 500 рублей, рубашку ценой 800 рублей и кеды ценой 1 600 рублей. В каком случае В. заплатит за покупку меньше всего? В ответ запишите сумму, которую заплатит В.

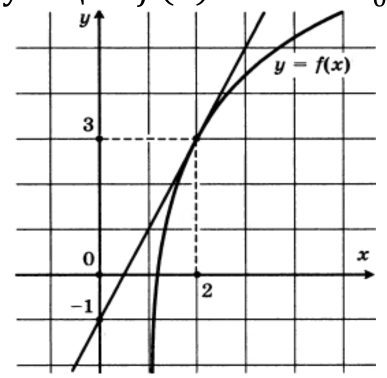
1. В. купит все три товара сразу.
2. В. купит сначала куртку и рубашку, а потом кеды со скидкой.
3. В. купит сначала куртку и кеды, а потом рубашку со скидкой.

462. Найдите площадь квадрата $ABCD$. Размер каждой клетки 1×1 см. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



463. Найдите значение выражения $7 \cdot 10^{\log_{10} 3}$.

464. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведенная в точке с абсциссой 2. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке $x_0 = 2$.



465. В электросеть включен предохранитель, рассчитанный на силу тока 16 А. Определите, какое минимальное сопротивление должно быть у электроприбора, подключаемого к розетке в 220 вольт, чтобы сеть продолжала работать. Сила тока в цепи I связана с напряжением U соотношением $I = \frac{U}{R}$, где R – сопротивление электроприбора. Ответ выразите в омах.

466. Найдите наименьшее значение функции $y = 5\cos x - 6x + 4$ на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

467. Моторная лодка прошла против течения 24 км и вернулась обратно, затратив на обратный путь на 20 мин меньше, чем при движении против течения. Найдите скорость (в км/ч) лодки в неподвижной воде, если скорость течения равна 3 км/ч.

Уравнения и неравенства

Занятие 21

Часть 1. Аудиторная работа

468. Решите уравнение $(2^x-1)\cdot\lg(2^x-1)=0$. В ответе укажите корень уравнения или произведение корней, если их несколько.

469. Определите значение переменной x, если известно, что сумма чисел 3^{2x+1} и $5\cdot 3^x$ равна 2.

470. Определите число корней уравнения $\sqrt{49-7^x}\cdot\sqrt{5^x-125}=0$.

471. Найдите произведение всех корней уравнения
$$x^2\cdot 3^x-9x^2-9\cdot 3^x+81=0.$$

472. Найдите сумму всех корней уравнения $3^{\frac{1}{x-2}}=\sqrt{3^{x-1}}$.

473. Решите уравнение $9\cdot 7^{\log_7 x}=14x-4$.

474. Найдите длину отрезка числовой прямой от начала отсчета до корня уравнения $3^{2x+1}=1-2\cdot 3^x$.

475. Найдите наименьшее значение x, при котором верно равенство
$$5^{\frac{x^3-x}{2}}=\left(\sqrt{2^{x+1}}\right)^{x(x-1)}.$$

476. Решите уравнение $81\cdot 3^{4x}+x\cdot 3^{4x}=0$.

477. Найдите абсциссу точки пересечения графиков функций
$$y=\lg\big((x-1)(x+3)\big) \text{ и } y=\lg\frac{x-1}{x+3}.$$

478. Определите количество значений переменной x, при которых произведение чисел $\log_4\frac{x+1}{2}$ и $\log_{\frac{1}{4}}(x-1)$ равно 0.

479. Решите уравнение $x^{\log_3 x}=81$. В ответ запишите корень уравнения или произведение корней, если их несколько.

Ответы

468	469	470	471	472	473
1	– 1	0	– 18	3	0,8
474	**475**	**476**	**477**	**478**	**479**
1	– 1	– 81	– 4	1	1

Часть 2. Самостоятельная работа

480. Найдите сумму корней уравнения $3^{|x-1|}=5$.

481. Решите уравнение $2^x\cdot 5^{x+1}=10\cdot 2^{x-1}$.

482. Решите уравнение $7\cdot 10^{\lg x}=5x+4$.

483. Решите уравнение $9^{\frac{1}{x}-3}=\frac{1}{3}\ln\sqrt[3]{e}$.

484. Найдите все значения переменной x, при которых числа $3\cdot 5^{2x^2-3x-1}$ и $5\cdot 3^{2x^2-3x-1}$ равны. Если таких значений несколько, в ответ запишите их сумму.

485. Решите уравнение $\log_{\sqrt{2}} \log_{0,5} \frac{1}{x+2} = 2$.

486. Найдите абсциссу той точки, в которой прямая $y = 1$ пересекает график функции $y = 7^{\log_5 \frac{3}{x+5}}$.

487. Найдите наименьший целый корень уравнения

$$\log_\pi \frac{4}{x-2} + \log_\pi \frac{x-2}{4} = 0.$$

Занятие 22

Часть 1. Аудиторная работа

488. Найдите наименьшее положительное значение x, при котором имеет смысл выражение $\sqrt{\sin \pi x - 1}$.

489. Определите количество корней уравнения $\sqrt{\sin x} \cdot \cos x = 0$, принадлежащих отрезку $[-2\pi; 2\pi]$.

490. Найдите сумму корней уравнения $4\sin^2 \pi x = 1$, принадлежащих отрезку $[0; 2]$.

491. Определите количество корней уравнения $3\cos^2 x = 0{,}5\sqrt{27} \cos x$, принадлежащих отрезку $[0; 2\pi]$.

492. Решите уравнение $\frac{2\mathrm{tg} x}{1-\mathrm{tg}^2 x} = \sqrt{3}$. В ответ запишите величину суммы двух наименьших по модулю корней уравнения, выраженную в градусах.

493. Вычислите величину $\sin x_0$, где x_0 – наименьший положительный корень уравнения $\sqrt{3} \sin 2x = \sin x + \sin 3x$.

494. Найдите произведение всех корней уравнения

$$(x+2)\sqrt{x^2 + x - 2} = 4 + 2x.$$

495. Решите уравнение $\sqrt[3]{2x + 3 - \sqrt{x^2 - 7}} = 0$. В ответе укажите количество корней.

496. Определите количество корней уравнения $\sqrt{x+4} + \sqrt{x+21} = 4$.

497. Найдите абсциссу точки пересечения графика функции

$$y = \sqrt[4]{x} - \sqrt{x} + 2 \text{ с осью } Ox.$$

498. Найдите значение x, при котором выполнено равенство $a \cdot b = c$, где $a = \sqrt{x+1} - 1$, $b = \sqrt{x+1} + 1$, $c = \sqrt{x^4 - x^2 - 8}$.

499. Найдите количество целых неотрицательных значений x, для которых верно равенство $\sqrt{(x-5)^2} = 5 - x$.

Ответы

488	489	490	491	492	493
0,5	7	4	4	– 30	0,5
494	**495**	**496**	**497**	**498**	**499**
12	0	0	16	2	6

Часть 2. Самостоятельная работа

500. Определите количество корней уравнения $\sin^2 x + \sin x = 0$, принадлежащих интервалу $(-4; 4)$.

501. Найдите разность наименьшего положительного и наибольшего отрицательного корней уравнения $\cos \pi x - 2\sin\frac{2\pi}{3}\sin \pi x = 0$.

502. Найдите сумму корней уравнения $4\cos^2 \pi x = 1$, принадлежащих отрезку $[0; 1]$.

503. Решите уравнение $\frac{1+\mathrm{tg}^2 x}{4\sin^2 x} = 1$. В ответ запишите величину наименьшего положительного корня уравнения в градусах.

504. Решите уравнение $\sqrt{x+3} \cdot \sqrt{3x-7} = x + 3$.

505. Решите уравнение $\sqrt{x^4 - 2x - 11} = 1 - x$.

506. Решите уравнение $\sqrt{x - \sqrt{4-x}} = 2$.

507. Найдите сумму корней уравнения $\sqrt{x^2 - 4} \cdot \left(3 - \sqrt{1-x}\right) = 0$.

Занятие 23

Часть 1. Аудиторная работа

508. Сколько целых решений имеет неравенство $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}(x+2) > -2$?

509. Найдите наибольшее целое решение неравенства
$$\log_7(3x) + \log_7 2 \le \log_7 6.$$

510. Найдите наименьшее значение x, при котором график функции $y = \log_6(x^2 + 5x)$ лежит не выше прямой $y = 1$.

511. Найдите число целых решений неравенства
$$\log_\pi(x^2 + 3x) \le \log_\pi(8 + x).$$

512. Найдите наименьшее решение неравенства $\left(\frac{1}{49}\right)^{2x} \le 7^{-3x+11}$.

513. Найдите наименьшее целое решение неравенства
$$0{,}7^{4x-1} - 0{,}7^{4x-2} > -0{,}3.$$

514. Найдите наибольшее целое x, при котором значение функции $y = 5^x$ больше значения функции $y = 25^x$.

515. Найдите число целых решений неравенства $1{,}7^{5x^2+4x} \le 1{,}7^{4x^2-3}$.

516. Найдите наибольшее целое отрицательное решение неравенства
$$\frac{2}{3x^2 - 5x - 12} \ge 0.$$

517. Найдите наибольшее целое решение неравенства $\frac{x-7}{(\log_3(-x))^2} \le 0$.

518. Найдите количество целых решений неравенства $\frac{\log_3 x}{x-4} < 0$.

519. Найдите количество целых решений неравенства $\frac{x^2-3x+2}{3^x+1} < 0$.

Ответы

508	509	510	511	512	513
4	1	– 6	3	– 11	1
514	**515**	**516**	**517**	**518**	**519**
– 1	3	– 2	– 2	2	0

Часть 2. Самостоятельная работа

520. Решите неравенство $\log_4 x \leq 1$.

521. Найдите наибольшее целое x, при котором выполняется неравенство $\log_{8,1} x \geq \log_{8,1}(5x-8)$.

522. Найдите наибольшее значение x, при котором график функции $y = \log_{\sqrt{2}}(5x-3)$ лежит не выше прямой $y = 4$.

523. При каких x выполняется неравенство $(3{,}5)^{3-2x} > \left(\frac{4}{49}\right)^{4x}$?

524. Найдите наименьшее целое решение неравенства

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{-x} - 5 \cdot 5^x < -20.$$

525. Найдите наименьшее целое решение неравенства $\frac{3}{2x^2+x-6} \leq 0$.

526. Найдите количество целочисленных решений неравенства

$$\frac{x^2-2x-8}{2^x+3} < 0.$$

527. Найдите количество целочисленных решений неравенства

$$\frac{\log_7 x}{6-2x} > 0.$$

Занятие 24

Часть 1. Аудиторная работа

528. Решите уравнение $5^{\frac{1}{\log_4 x}} = 0{,}2$.

529. Решите уравнение $32 \cdot 8^{2x} + x \cdot 8^{2x} = 0$.

530. Найдите все значения x, при которых произведение чисел $4^x - 1$ и $\ln(2^x - 3)$ равно 0. Если таких значений несколько, то в ответ запишите их произведение.

531. Найдите абсциссу точки пересечения графика функции $y = \log_{0,2}(26 - 3^x) + 2$ с осью Ox.

532. Определите количество корней уравнения $\cos^2 x - 2\cos x = 0$, принадлежащих отрезку $[0; 2\pi]$.

533. Решите уравнение $\left(\sqrt{12}\cos x - 3\right)(\mathrm{tg}3x + 1) = 0$. В ответ запишите величину разности между наименьшим положительным и наибольшим отрицательным корнями уравнения, выраженную в градусах.

534. Найдите разность большего и меньшего корней уравнения

$$\sqrt{x^4 + 3x} = x^2 + 1.$$

535. Найдите сумму всех корней уравнения $(x-3)\sqrt{x-1}+3=x$.

536. Найдите область определения функции $y=\log_{0,2}(9x-x^2-20)$.

537. Найдите наибольшее целое x, при котором график функции $y=1{,}3^{\frac{x^2+2}{x-4}}$ лежит ниже прямой $y=1$.

538. Найдите наибольшее целое решение неравенства $\frac{1}{2x^2-7x-4}<0$.

539. Найдите наименьшее целое решение неравенства

$$\frac{4}{(3^x-1)(x+2)}\le 0.$$

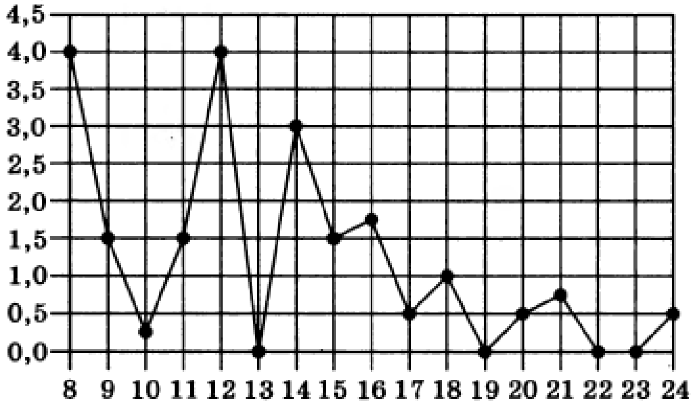
Ответы

528	529	530	531	532	533
0,25	– 32	2	0	2	45
534	**535**	**536**	**537**	**538**	**539**
0,5	5	(4; 5)	3	3	– 1

Часть 2. Самостоятельная работа

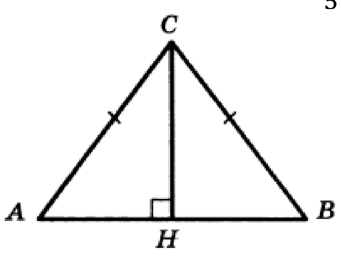
540. Магазин открывается в 10 часов утра, а закрывается в 10 часов вечера. Обеденный перерыв длится с 15 до 16 часов. Сколько часов в день открыт магазин?

541. На рисунке жирными точками показано суточное количество осадков, выпадавших в Томске с 8 по 24 января 2005 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали – количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, сколько дней из данного периода осадков не было.



542. Найдите корень уравнения $\log_5(x-4)=2$.

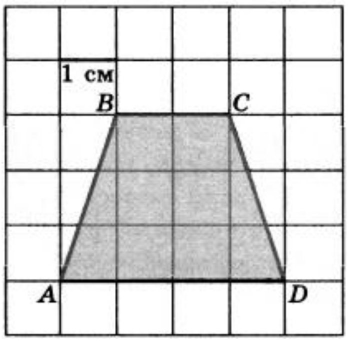
543. В треугольнике ABC $AC=BC=5$, $\sin A=\frac{4}{5}$. Найдите AB.



544. В таблице даны тарифы на услуги трех фирм такси. Предполагается поездка длительностью 70 мин. Нужно выбрать фирму, в которой заказ будет стоить дешевле всего. Сколько рублей будет стоить этот заказ?

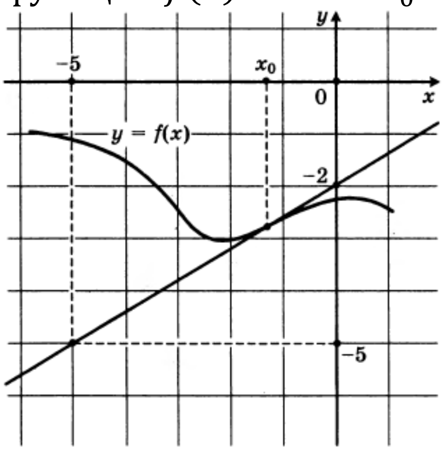
Фирма такси	**Подача машины**	**Продолжительность и стоимость минимальной поездки***	**Стоимость одной минуты поездки сверх минимальной поездки**
А	200	Нет	13
Б	Бесплатно	15 мин, 300 рублей	18
В	180	10 мин, 200 рублей	14

545. Найдите площадь трапеции $ABCD$. Размер каждой клетки 1×1 см. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



546. Найдите значение выражения $5 \cdot 7^{\log_7 3}$.

547. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведенная в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



548. Коэффициент полезного действия (КПД) некоторого двигателя определяется формулой $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\%$, где T_1 – температура нагревателя (в кельвинах), T_2 – температура холодильника (в кельвинах). При какой минимальной температуре нагревателя T_1 КПД этого двигателя будет не меньше 45%, если температура холодильника $T_2 = 275$ К? Ответ выразите в кельвинах.

549. Найдите наибольшее значение функции $y = 3\text{tg}x - 3x + 5$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; 0\right]$.

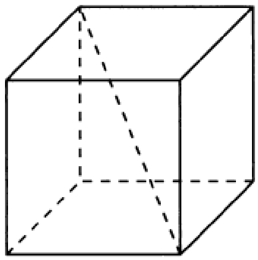
550. Теплоход, скорость которого в неподвижной воде равна 20 км/ч, проходит по течению реки до пункта назначения и после стоянки возвращается в исходный пункт. Найдите расстояние, пройденное теплоходом за весь рейс, если скорость течения равна 4 км/ч, стоянка длится 3 часа, а в исходный пункт теплоход возвращается через 13 часов после отплытия из него. Ответ дайте в километрах.

Стереометрия

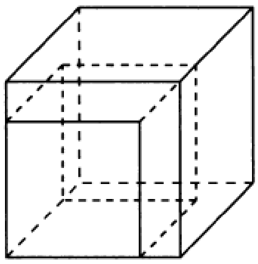
Занятие 25

Часть 1. Аудиторная работа

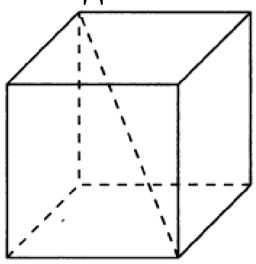
551. Диагональ куба равна $\sqrt{27}$. Найдите его объем.



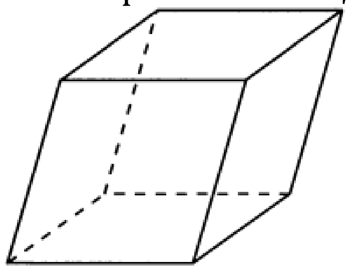
552. Если каждое ребро куба увеличить на 1, то его объем увеличится на 19. Найдите ребро куба.



553. Диагональ куба равна 1. Найдите площадь его поверхности.

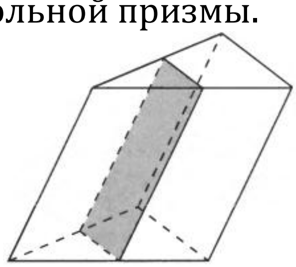


554. Гранью параллелепипеда является квадрат со стороной 1. Одно из ребер параллелепипеда составляет с его гранью угол в 60° и равно $\sqrt{3}$. Найдите объем параллелепипеда.

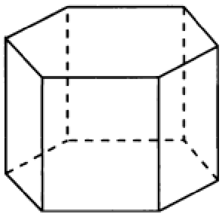


555. Найдите площадь поверхности прямой призмы, в основании которой лежит ромб с диагоналями, равными 3 и 4, и боковым ребром, равным 5.

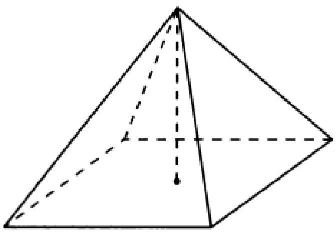
556. Через среднюю линию основания треугольной призмы, площадь боковой поверхности которой равна 12, проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите площадь боковой поверхности отсеченной треугольной призмы.



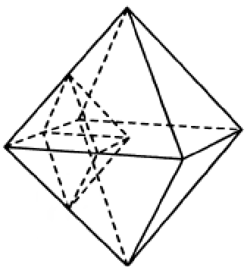
557. Найдите объем правильной шестиугольной призмы, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны $\sqrt{3}$.



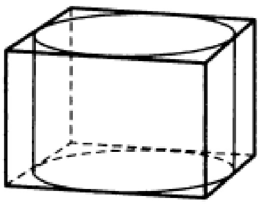
558. Стороны основания правильной четырехугольной пирамиды равны 6, а боковые ребра равны 5. Найдите площадь поверхности пирамиды.



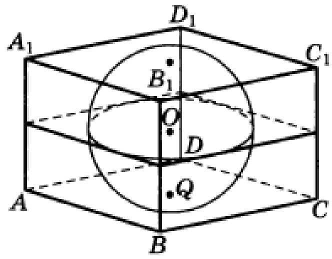
559. Во сколько раз уменьшится объем октаэдра, если все его ребра уменьшить в два раза?



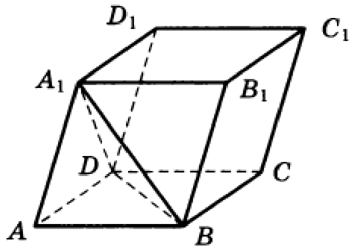
560. Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания и высота которого равны 5,5. Найдите объем параллелепипеда.



561. Прямоугольный параллелепипед описан около сферы радиуса 6. Найдите его объем.

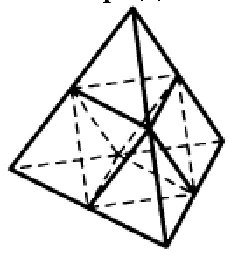


562. Найдите объем параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если объем треугольной пирамиды $ABDA_1$ равен 3.

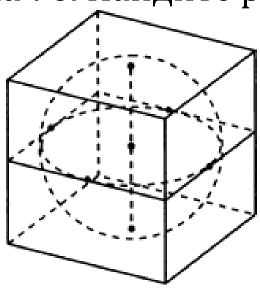


563. Середина ребра куба со стороной 0,7 является центром шара радиуса 0,35. Найдите площадь S части поверхности шара, лежащей внутри куба. В ответе запишите $\frac{S}{\pi}$.

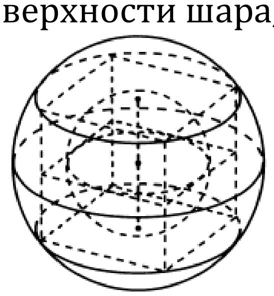
564. Объем тетраэдра равен 1,2. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются середины сторон данного тетраэдра.



565. Площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда, описанного около сферы, равна 96. Найдите радиус сферы.



566. Во сколько раз площадь поверхности шара, описанного около куба, больше площади поверхности шара, вписанного в этот же куб?



567. Площадь грани прямоугольного параллелепипеда равна 12. Ребро, перпендикулярное этой грани, равно 4. Найдите объем параллелепипеда.

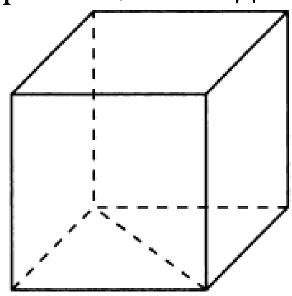
568. Найдите объем правильной треугольной пирамиды, стороны основания которой равны 1, а высота равна $\sqrt{3}$.

Ответы

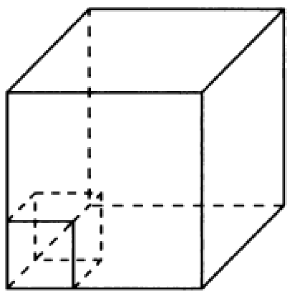
551	**552**	**553**	**554**	**555**	**556**
27	2	2	1,5	30	6
557	**558**	**559**	**560**	**561**	**562**
4,5	84	8	665,5	216	18
563	**564**	**565**	**566**	**567**	**568**
0,1225	0,6	2	3	48	0,25

Часть 2. Самостоятельная работа

569. Диагональ грани куба равна $\sqrt{8}$. Найдите его объем.

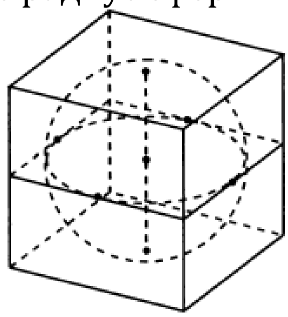


570. Во сколько раз увеличится объем куба, если его ребра увеличить в три раза?

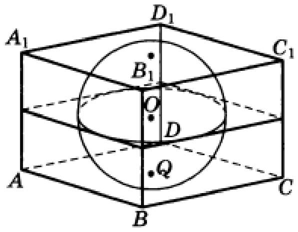


571. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 1 и 2. Площадь поверхности параллелепипеда равна 16. Найдите его диагональ.

572. Объем прямоугольного параллелепипеда, описанного около сферы, равен 216. Найдите радиус сферы.



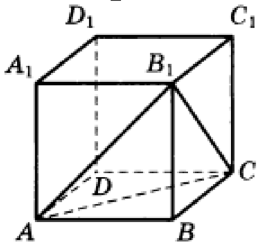
573. Прямоугольный параллелепипед описан около сферы радиуса 8. Найдите его объем.



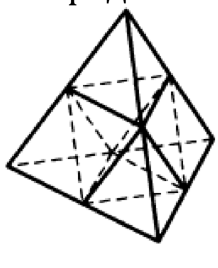
574. Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Площадь боковой поверхности отсеченной треугольной призмы равна 12. Найдите площадь боковой поверхности исходной призмы.

575. Середина ребра куба со стороной 2 является центром шара радиуса 1. Найдите площадь S части поверхности шара, лежащей внутри куба. В ответе запишите $\frac{S}{\pi}$.

576. Объем параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 1,8. Найдите объем треугольной пирамиды $ABCB_1$.



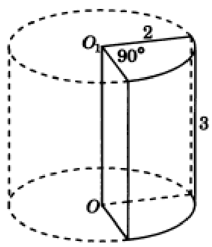
577. Объем тетраэдра равен 0,7. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются середины сторон данного тетраэдра.



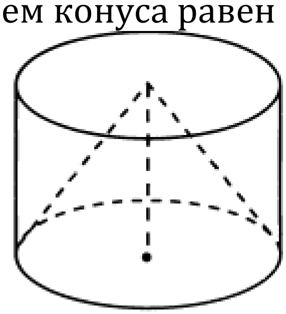
Занятие 26

Часть 1. Аудиторная работа

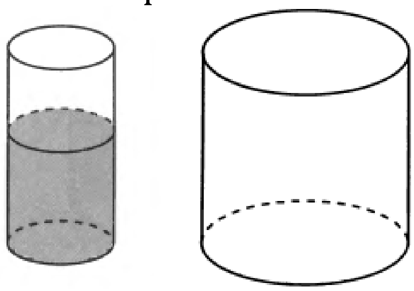
578. Найдите объем V части цилиндра, изображенного на рисунке, высекаемой из цилиндра прямым двугранным углом. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.



579. Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Найдите объем цилиндра, если объем конуса равен 50.

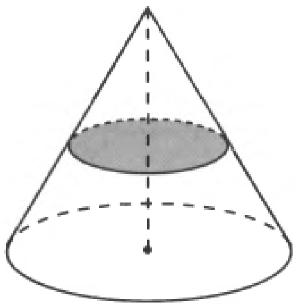


580. Воду, находящуюся в цилиндрическом сосуде на уровне 12 см, перелили в цилиндрический сосуд в два раза большего диаметра. На какой высоте будет находиться уровень воды во втором сосуде? Ответ выразите в сантиметрах.



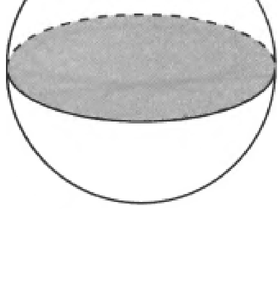
581. Найдите объем V конуса, образующая которого равна 2 и наклонена к плоскости основания под углом 30°. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.

582. Объем конуса равен 12. Параллельно основанию конуса проведено сечение, делящее высоту пополам. Найдите объем отсеченного конуса.

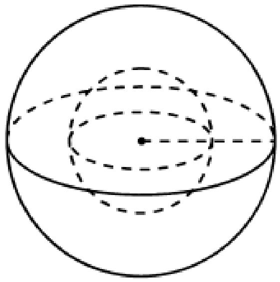


583. Площадь осевого сечения цилиндра равна $\frac{2}{\pi}$. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

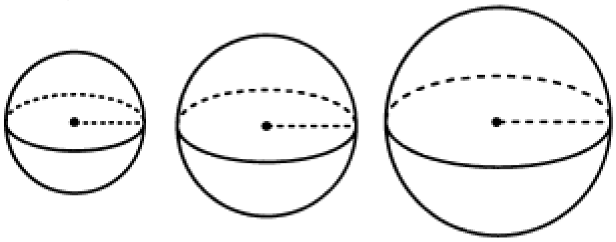
584. Площадь большого круга шара равна 1. Найдите площадь поверхности шара.



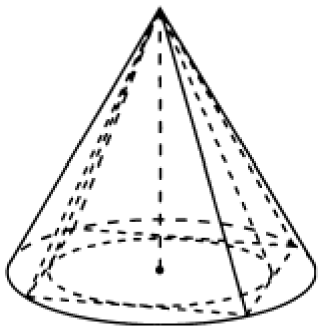
585. Во сколько раз увеличится площадь поверхности шара, если его радиус увеличить в два раза?



586. Радиусы трех шаров равны 3, 4 и 5. Найдите радиус шара, объем которого равен сумме их объемов.

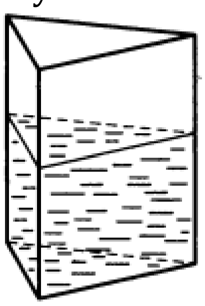


587. Во сколько раз объем конуса, описанного около правильной четырехугольной пирамиды, больше объема конуса, вписанного в эту пирамиду?

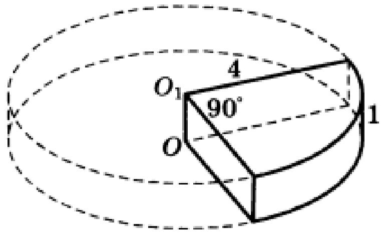


588. В цилиндрический сосуд налили 2100 см^3 воды. Уровень воды при этом достигает высоты 20 см. В жидкость полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 5 см. Чему равен объем детали? Ответ выразите в кубических сантиметрах.

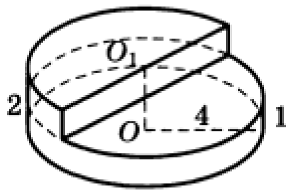
589. В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили 1900 см^3 воды и погрузили в воду деталь. При этом уровень воды поднялся с отметки 20 см до отметки 22 см. Найдите объем детали. Ответ выразите в кубических сантиметрах.



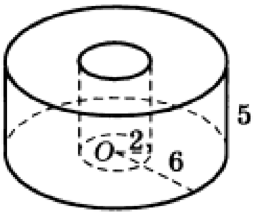
590. Найдите объем V части цилиндра, изображенной на рисунке. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.



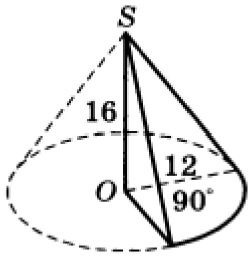
591. Найдите объем V части цилиндра, изображенной на рисунке. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.



592. Найдите объем V части цилиндра, изображенной на рисунке. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.



593. Найдите объем V части конуса, изображенной на рисунке. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.



594. Высота конуса равна 6, образующая равна 10. Найдите его объем, деленный на π.

595. В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 18 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если ее перелить во второй сосуд, диаметр которого в 3 раза больше первого?

Ответы

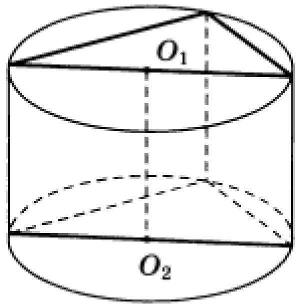
578	579	580	581	582	583
3	150	3	1	1,5	2
584	**585**	**586**	**587**	**588**	**589**
4	4	6	2	525	190
590	**591**	**592**	**593**	**594**	**595**
4	24	160	192	128	2

Часть 2. Самостоятельная работа

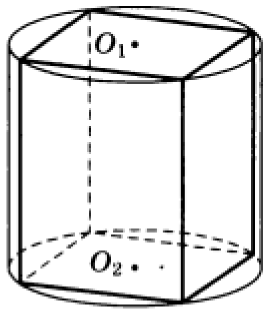
596. В цилиндрический сосуд налили 1700 см³ воды. Уровень воды при этом достигает высоты 10 см. В жидкость полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 5 см. Чему равен объем детали? Ответ выразите в см³.

597. В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили 1100 см³ воды и погрузили в воду деталь. При этом уровень воды поднялся с отметки 22 см до отметки 25 см. Найдите объем детали. Ответ выразите в см³.

598. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с катетами 5 и 6. Боковые ребра равны $\frac{10}{\pi}$. Найдите объем цилиндра, описанного около этой призмы.

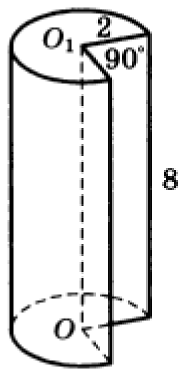


599. В основании прямой призмы лежит квадрат со стороной 7. Боковые ребра равны $\frac{3}{\pi}$. Найдите объем цилиндра, описанного около этой призмы.

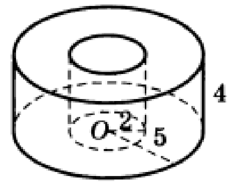


600. Радиус основания конуса равен 3, высота равна 4. Найдите площадь поверхности конуса, деленную на π.

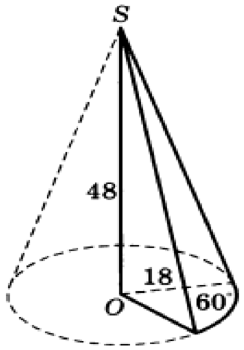
601. Найдите объем V части цилиндра, изображенной на рисунке. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.



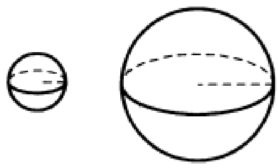
602. Найдите объем V части цилиндра, изображенной на рисунке. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.



603. Найдите объем V части конуса, изображенной на рисунке. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.



604. Объем одного шара в 27 раз больше объема второго. Во сколько раз площадь поверхности первого шара больше площади поверхности второго?



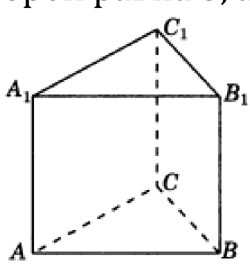
Занятие 27

Часть 1. Аудиторная работа

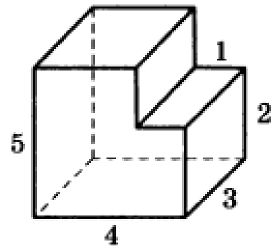
605. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются вершины A, B, C, A_1, B_1, C_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 3$, $AD = 4$, $AA_1 = 5$.

606. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются вершины A, B, C, B_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 3$, $AD = 3$, $AA_1 = 4$.

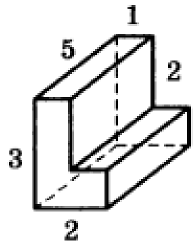
607. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются вершины A, B, A_1, C_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, площадь основания которой равна 3, а боковое ребро равно 2.



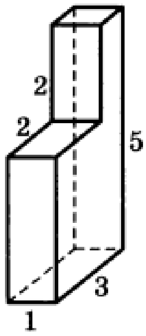
608. Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы многогранника прямые).



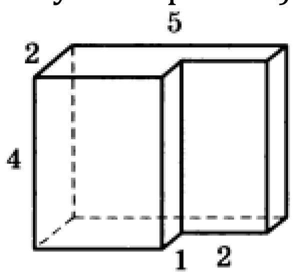
609. Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



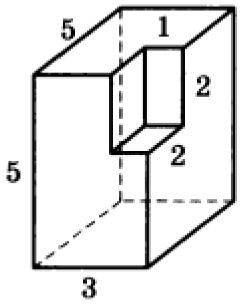
610. Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



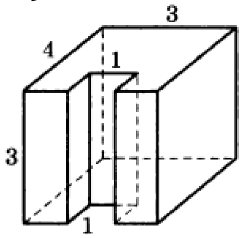
611. Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



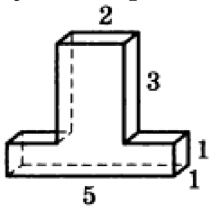
612. Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



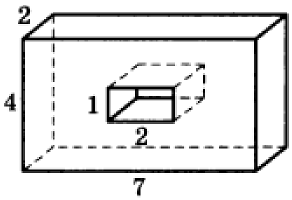
613. Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



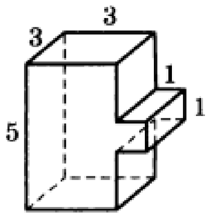
614. Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



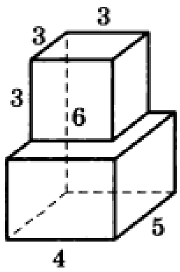
615. Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



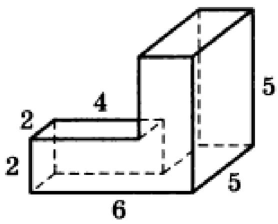
616. Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



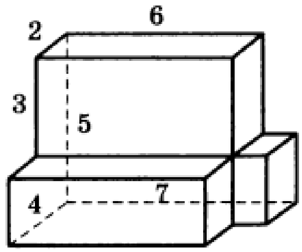
617. Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



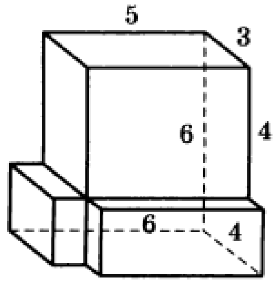
618. Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



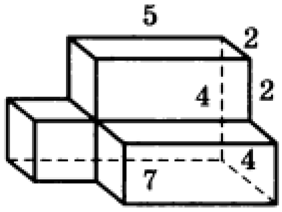
619. Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



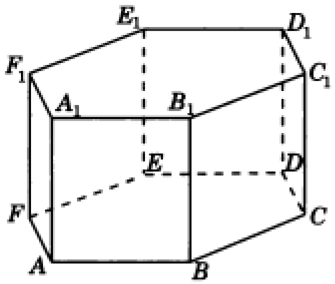
620. Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



621. Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



622. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются вершины A, B, C, A_1, B_1, C_1 правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, площадь основания которой равна 6, а боковое ребро равно 3.



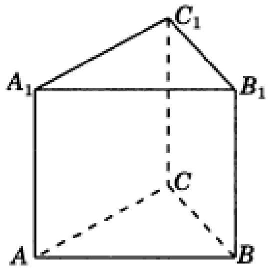
Ответы

605	**606**	**607**	**608**	**609**	**610**
30	6	2	51	58	11
611	**612**	**613**	**614**	**615**	**616**
72	71	33	40	52	48
617	**618**	**619**	**620**	**621**	**622**
87	66	88	106	120	3

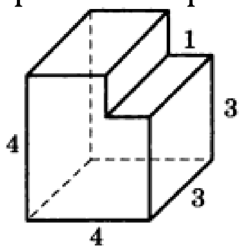
Часть 2. Самостоятельная работа

623. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются вершины A_1, B, C, C_1, B_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 4$, $AD = 3$, $AA_1 = 4$.

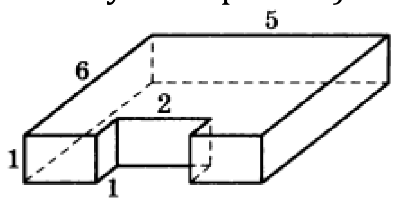
624. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются вершины A, B, C, A_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, площадь основания которой равна 2, а боковое ребро равно 3.



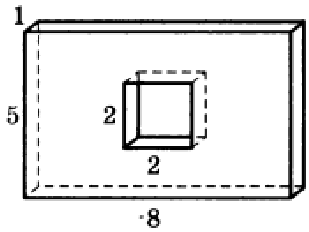
625. Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы многогранника прямые).



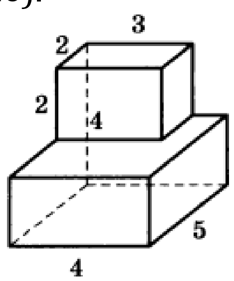
626. Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



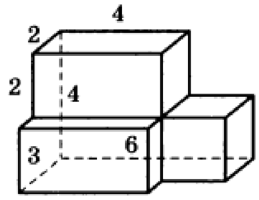
627. Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



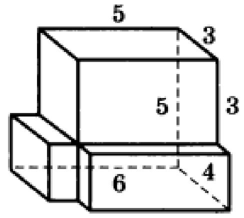
628. Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



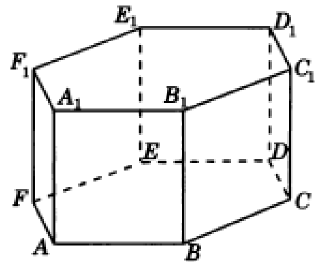
629. Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



630. Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



631. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются вершины A, B, C, D, E, F, A_1 правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, площадь основания которой равна 4, а боковое ребро равно 3.



Занятие 28

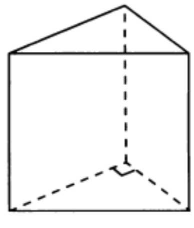
Часть 1. Аудиторная работа

632. Диагональ куба равна $3\sqrt{3}$. Найдите его объем.

633. Площадь грани прямоугольного параллелепипеда равна 12. Ребро, перпендикулярное этой грани, равно 4. Найдите объем параллелепипеда.

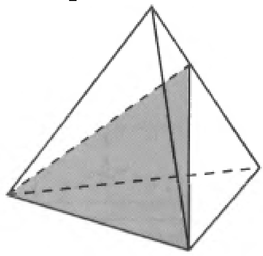
634. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 2 и 6. Объем параллелепипеда равен 48. Найдите третье ребро параллелепипеда, выходящее из той же вершины.

635. Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8. Площадь ее поверхности равна 288. Найдите высоту призмы.



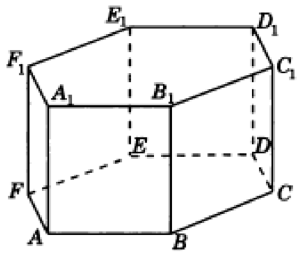
636. Основанием пирамиды является прямоугольник со сторонами 3 и 4. Ее объем равен 16. Найдите высоту пирамиды.

637. Объем треугольной пирамиды равен 15. Плоскость проходит через сторону основания этой пирамиды и пересекает противоположное боковое ребро в точке, делящей его в отношении 1:2, считая от вершины пирамиды. Найдите больший из объемов пирамид, на которые плоскость разбивает исходную пирамиду.



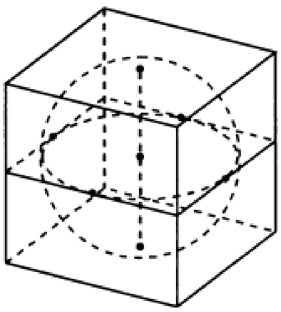
638. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются вершины A, B, A_1, D, C, D_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 3$, $AD = 4$, $AA_1 = 3$.

639. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются вершины A, B, C, D, E, F, D_1 правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, площадь основания которой равна 3, а боковое ребро равно 2.



640. Длина окружности основания цилиндра равна 3. Площадь боковой поверхности равна 6. Найдите высоту цилиндра.

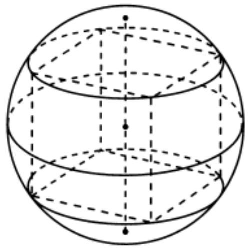
641. В куб вписан шар радиуса 2. Найдите объем куба.



642. Площадь поверхности правильной треугольной призмы равна 6. Какой будет площадь поверхности призмы, если все ее ребра увеличить в три раза?

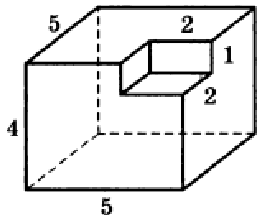
643. В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 18 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если ее перелить во второй сосуд, диаметр которого в 3 раза больше первого? Дайте ответ в сантиметрах.

644. Куб вписан в шар радиуса $\sqrt{3}$. Найдите объем куба.

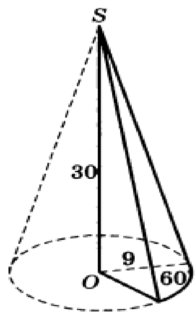


645. В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили 1000 см^3 воды и погрузили в воду деталь. При этом уровень воды поднялся с отметки 25 см до отметки 27 см. Найдите объем детали. Ответ выразите в кубических сантиметрах.

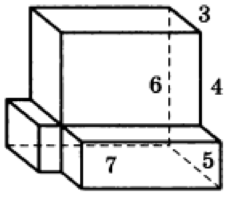
646. Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



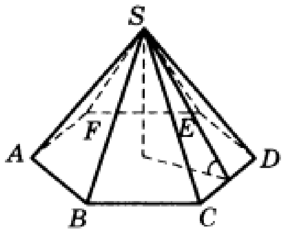
647. Найдите объем V части конуса, изображенной на рисунке. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.



648. Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



649. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна 4, а угол между боковой гранью и основанием равен 45°. Найдите объем пирамиды.



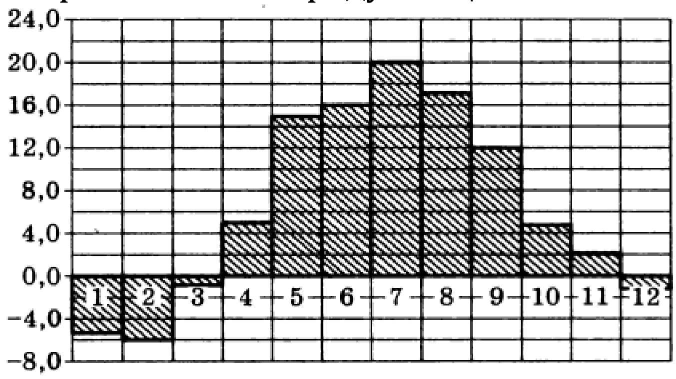
Ответы

632	633	634	635	636	637
27	48	4	10	4	10
638	**639**	**640**	**641**	**642**	**643**
18	2	2	64	54	2
644	**645**	**646**	**647**	**648**	**649**
8	80	130	135	122	48

Часть 2. Самостоятельная работа

650. Больному прописан курс лекарства, которое нужно пить по 0,5 г три раза в день в течение трех недель. В одной упаковке содержится 10 таблеток по 0,5 г. Какого наименьшего количества упаковок хватит на весь курс?

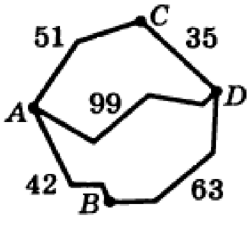
651. На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Минске за каждый месяц 2003 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали – температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, сколько было месяцев, когда среднемесячная температура превышала 10 градусов Цельсия.



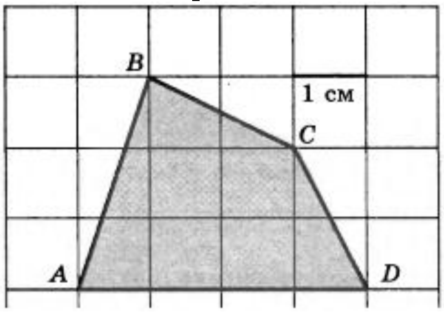
652. Найдите корень уравнения $\sqrt{4x+5}=5$.

653. Один острый угол прямоугольного треугольника на 30° больше другого. Найдите больший острый угол.

654. Из пункта A в пункт D ведут три дороги. Через пункт B едет грузовик со средней скоростью 42 км/ч, через пункт C едет автобус со средней скоростью 43 км/ч. Третья дорога – без промежуточных пунктов, и по ней движется легковой автомобиль со средней скоростью 66 км/ч. На рисунке показаны схема дорог и расстояние между пунктами по дорогам. Все три автомобиля одновременно выехали из пункта A. Какой автомобиль добрался до пункта D позже других? В ответе укажите, сколько часов он находился в дороге.

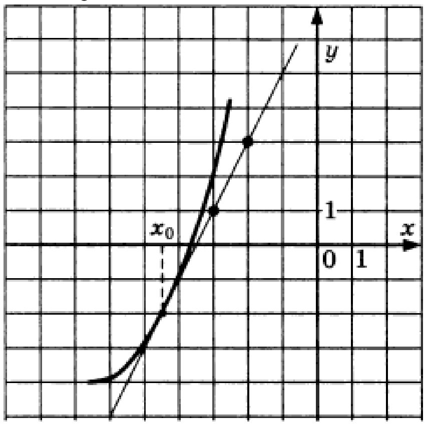


655. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$. Размер каждой клетки 1×1 см. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



656. Найдите значение выражения $10 \cdot 7^{\log_7 4}$.

657. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



658. Объем конуса равен 6 см³. Чему равен объем цилиндра, который имеет такое же основание и такую же высоту, как и данный конус?

659. В электросеть включен предохранитель, рассчитанный на силу тока 20 А. Определите, какое минимальное сопротивление должно быть у электроприбора, подключаемого к розетке в 220 вольт, чтобы сеть продолжала работать. Сила тока в цепи I связана с напряжением U соотношением $I = \frac{U}{R}$, где R – сопротивление электроприбора. Ответ выразите в омах.

660. Найдите наибольшее значение функции $y = \ln(x+5)^5 - 5x$ на отрезке $[-4{,}5; 0]$.

661. Города A, B и C соединены прямолинейным шоссе, причем город B расположен между городами A и C. Из города A в сторону города C выехал легковой автомобиль, и одновременно с ним из города B в сторону города C выехал грузовик. Через сколько часов после выезда легковой автомобиль догонит грузовик, если скорость легкового автомобиля на 28 км/ч больше скорости грузовика, а расстояние между городами A и B равно 112 км?

Комбинаторика и вероятность

Занятие 29

Часть 1. Аудиторная работа

662. Выписаны в порядке возрастания все трехзначные числа, в записи которых используются только цифры 0, 2, 4, 6. Какое число следует за числом 426?

663. Сколько существует двузначных чисел, у которых цифра десятков меньше цифры единиц?

664. Из класса, в котором учится 15 девочек и 10 мальчиков, нужно выбрать одну девочку и одного мальчика для ведения школьного вечера. Сколькими способами это можно сделать?

665. В конференции участвовало 30 человек. Каждый участник с каждым обменялся визитной карточкой. Сколько всего понадобилось карточек?

666. Сколько различных имен-отчеств можно составить из имен Надежда, Иван, Андрей, Наталья, Дмитрий, Людмила, Александр?

667. В расписании уроков на среду для первого класса должно быть четыре урока: два урока математики, урок чтения и урок физкультуры. Сколькими способами можно составить расписание на этот день?

668. Сколько существует трехзначных чисел, оканчивающихся тройкой?

669. Анаграммой называется слово, полученное из данного слова перестановкой букв. Сколько анаграмм можно получить из слова «ученик»? (*Слова не обязательно должны быть осмысленными*.)

670. В 10-м классе 10 учебных предметов. Сколькими способами можно поставить в среду первый и второй уроки (уроки разные)?

671. Сколько трехзначных чисел можно записать, используя только цифры 0, 2, 4, 6?

672. В меню школьной столовой 2 разных супа, 4 вторых блюда и 3 вида сока. Сколько можно составить вариантов обеда из трех блюд?

673. Для ведения собрания из 20 человек надо выбрать председателя и секретаря. Каким числом способов это можно сделать?

674. Для ведения собрания из 20 человек надо выбрать президиум в количестве двух человек. Каким числом способов это можно сделать?

675. Сколькими способами можно разложить в два кармана пять купюр достоинством в 10, 50, 100, 500 и 1 000 рублей?

676. В вашем распоряжении есть три разных флага. На флагштоке поднимается сигнал, состоящий не менее чем из двух флагов. Сколько различных сигналов можно поднять на флагштоке, если порядок флагов в сигнале учитывается?

677. Сколькими способами можно выбрать из натуральных чисел от 1 до 30 три натуральных числа так, чтобы их сумма была четной?

678. Сколько различных пятизначных чисел можно записать из цифр числа 273 485 961 так, чтобы четные и нечетные цифры в числе чередовались?

679. Шесть ящиков занумерованы числами от 1 до 6. Сколькими способами можно разложить по этим ящикам 10 одинаковых шаров так, чтобы ни один ящик не оказался пустым?

Ответы

662	**663**	**664**	**665**	**666**	**667**
440	36	150	870	28	12
668	**669**	**670**	**671**	**672**	**673**
90	720	90	48	24	380
674	**675**	**676**	**677**	**678**	**679**
190	32	12	2 030	3 600	1 296

Часть 2. Самостоятельная работа

680. Выписаны в порядке возрастания все трехзначные числа, в записи которых используются только цифры 1, 3, 5, 7. Какое число следует за числом 537?

681. Из класса, в котором учится 10 девочек и 13 мальчиков, нужно выбрать для дежурства по классу одну девочку и одного мальчика. Сколькими способами это можно сделать?

682. Семеро друзей разъехались на новогодние каникулы. Перед Новым годом каждый из них послал всем остальным SMS-сообщения. Сколько всего сообщений было отправлено?

683. В коробке лежат четыре шара: два белых, красный, зеленый. Из нее вынимают два шара. Сколько существует различных вариантов вынуть два шара разного цвета?

684. В расписании уроков на среду для первого класса должно быть четыре урока: урок математики, урок чтения и два урока физкультуры. Сколькими способами можно составить расписание на этот день?

685. Сколько трехзначных чисел можно записать, используя только цифры 0, 3, 6, 9?

686. В гардеробе выпускника 5 разных рубашек, 4 галстука и 2 костюма. Сколько способов одеться на выпускной вечер у него имеется?

687. Автоматическая система состоит из пяти параллельно соединенных узлов, каждый из которых независимо от остальных может к моменту времени T выйти из строя. В скольких различных состояниях может находиться система к моменту времени T?

688. Сколько можно составить пятибуквенных «слов» из 3 гласных и 8 согласных букв, если гласные и согласные должны чередоваться?

689. Десять различных книг отдано двум продавцам. Сколькими способами они могут их распределить, если все книги могут быть отданы и одному продавцу?

Занятие 30

Часть 1. Аудиторная работа

690. На три призовых места претендуют Вася, Дима и Коля. Каким числом способов могут распределиться призовые места?

691. Сколькими способами 8 отдыхающих в лагере могут встать в очередь к умывальнику?

692. Сколькими способами можно рассадить 6 рыцарей за круглый стол?

693. Сколькими способами можно сделать трехцветный флаг с горизонтальными полосами одинаковой ширины, если имеется материя шести различных цветов?

694. На каждой из 5 карточек написано по одной нечетной цифре (*каждая цифра встречается один раз*). Сколько трехзначных чисел можно составить, используя эти карточки?

695. Есть 12 разных шариков и три ящика: красный, синий и зеленый. Сколькими способами можно заполнить ящики шариками (*по одному шарику в каждый ящик*)?

696. Сколькими способами можно выбрать из группы в 15 человек трех нарушителей для дежурства в столовой?

697. Сколькими способами можно разбить множество из 20 элементов на два подмножества так, чтобы одно содержало 5 элементов, а другое – 15 элементов?

698. Сколькими способами можно сформировать команду из 6 человек, если в группе 18 человек?

699. По понедельникам Кащей Бессмертный приходит к Бабе-Яге в гости и выпивает 6 опасных зелий для поддержания жизненного тонуса. На ближайший понедельник старуха приготовила меню из 14 различных напитков. Сколько различных наборов зелий может выбрать Кащей?

700. На плоскости отмечено 10 точек. Никакие три из них не лежат на одной прямой. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

701. У Пети есть 7 книг по математике, а у Коли – 8 книг (*все книги разные*). Сколькими способами они могут обменять по три свои книги друг с другом?

702. Для проведения вступительной олимпиады преподаватели распределяют 60 школьников по четырем аудиториям следующим образом: список в алфавитном порядке разбивается на 4 части, первая группа идет в первую аудиторию, вторая – во вторую и т. д. При этом в каждую аудиторию отправляется хотя бы один школьник. Сколькими способами это можно сделать?

703. Сколько существует трехзначных чисел, в записи которых используются только нечетные цифры?

704. Сколькими различными способами можно переставить буквы в слове «математика»?

705. В кодовом замке содержится 4 диска, на каждом из которых можно выбрать любую из 10 цифр. Сколько существует различных кодов для этого замка?

706. В магазине продаются шары четырех цветов: красного, желтого, синего и зеленого. Покупатель попросил продавца выбрать ему какие-нибудь семь шаров. Сколько возможностей сделать это есть у продавца?

707. Изобретатель Вася соорудил калькулятор с двумя кнопками: «0» и «1». На табло может уместиться 14 цифр. Сколько различных чисел, содержащих ровно 6 единиц, можно записать на этом калькуляторе?

Ответы

690	**69**	**692**	**693**	**694**	**695**
6	40 320	120	120	60	1 320
696	**697**	**698**	**699**	**700**	**701**
2 730	15 504	18 564	3 003	120	1 960
702	**703**	**704**	**705**	**706**	**707**
32 509	125	151 200	10 000	120	720 720

Часть 2. Самостоятельная работа

708. Четыре танкиста, четыре артиллериста и два летчика хотят сфотографироваться, стоя в один ряд, но так, чтобы представители одного рода войск стояли рядом. Каким числом способов они могут это сделать?

709. В чемпионате города по хоккею играет семь команд. Сколькими способами могут распределиться три призовых места?

710. В кафе 5 сортов мороженого в стаканчиках. Наташа каждый день покупает и съедает один за другим 3 стаканчика с различными сортами мороженого. За сколько дней она перепробует все возможные варианты с мороженым?

711. В коробке лежат четыре шара: белый, красный, синий, зеленый. Из нее вынимают два шара. Сколько существует способов сделать это?

712. Из десяти элементов $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j$ нужно выбрать пять элементов так, чтобы среди выбранных был элемент d. Сколькими способами это можно сделать?

713. В партии из 10 лотерейных билетов выигрышными являются пять. Приобретено три билета. В скольких случаях среди них есть хотя бы один выигрышный?

714. На окружности отмечены 5 красных, 7 желтых и 9 зеленых точек. Сколько есть треугольников в этих точках, у которых все вершины одноцветные?

715. В алфавите племени бум-бум три различные буквы. Сколько шестибуквенных слов может быть в их алфавите? (*Словом считается любая последовательность букв.*)

716. Сколькими способами можно переставить буквы в слове «молоток»?

717. Сколько существует пятизначных натуральных чисел, которые одинаково читаются слева направо и справа налево (*например: 17371, 28082*)?

Занятие 31

Часть 1. Аудиторная работа

718. В чемпионате по гимнастике участвуют 20 спортсменок: 8 из России, 7 – из США, остальные – из Китая. Порядок, в котором выступают гимнастки, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из Китая.

719. В среднем из 1000 садовых насосов, поступивших в продажу, 5 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает.

720. Фабрика выпускает сумки. В среднем на 100 качественных сумок приходится восемь сумок со скрытыми дефектами. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется качественной. Результат округлите до сотых.

721. Вася, Петя, Коля и Лёша бросили жребий – кому начинать игру. Найдите вероятность того, что начинать игру должен будет Петя.

722. Игральный кубик бросили один раз. Какова вероятность того, что выпало число очков меньше чем 4?

723. В мешочке имеется пять одинаковых кубиков. На всех гранях каждого кубика написана только одна из следующих букв: о, п, р, с, т. Найдите вероятность того, что на вынутых по одному и расположенных в «одну линию» кубиков можно будет прочесть слово «спорт». Результат округлите до тысячных.

724. В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что орел выпадет ровно один раз.

725. В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 8 очков. Результат округлите до сотых.

726. В случайном эксперименте бросают три игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 16 очков. Результат округлите до сотых.

727. Куб, все грани которого окрашены, распилен на тысячу кубиков одинакового размера, которые затем тщательно перемешаны. Найдите вероятность того, что наудачу извлеченный кубик имеет одну окрашенную грань.

728. В коробке шесть одинаковых занумерованных кубиков. Наудачу по одному извлекают все кубики. Найдите вероятность того, что номера извлеченных кубиков появятся в возрастающем порядке. Результат округлите до тысячных.

729. В пачке 20 карточек, помеченных номерами 101, 102, …, 120 и произвольно расположенных. Наудачу извлекают две карточки. Найдите вероятность того, что извлечены карточки с номерами 101 и 120. Результат округлите до тысячных.

730. В ящике имеется 15 деталей, среди которых 10 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает три детали. Найдите вероятность того, что извлеченные детали окажутся окрашенными. Результат округлите до сотых.

731. В партии из 10 деталей 8 стандартных. Найдите вероятность того, что среди наудачу извлеченных двух деталей есть хотя бы одна стандартная. Результат округлите до сотых.

732. В цехе работают шесть мужчин и четыре женщины. По табельным номерам наудачу отобраны семь человек. Найдите вероятность того, что среди отобранных лиц окажутся три женщины.

733. Устройство состоит из пяти элементов, из которых два изношены. При включении устройства включаются случайным образом два элемента. Найдите вероятность того, что включенными окажутся неизношенные элементы.

734. Набирая номер телефона, абонент забыл последние три цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Найдите вероятность того, что набраны нужные цифры.

735. В чемпионате мира участвуют 16 команд. С помощью жребия их нужно разделить на четыре группы по четыре команды в каждой. В ящике вперемешку лежат карточки с номерами групп: 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4. Капитаны команд тянут по одной карточке. Какова вероятность того, что команда России окажется во второй группе?

Ответы

718	**719**	**720**	**721**	**722**	**723**
0,25	0,995	0,93	0,25	0,5	0,008
724	**725**	**726**	**727**	**728**	**729**
0,5	0,14	0,03	0,384	0,001	0,005
730	**731**	**732**	**733**	**734**	**735**
0,26	0,98	0,5	0,3	0,001	0,25

Часть 2. Самостоятельная работа

736. В чемпионате по гимнастике участвуют 50 спортсменок: 17 из России, 22 – из США, остальные – из Китая. Порядок, в котором выступают гимнастки, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из Китая.

737. В среднем из 2000 садовых насосов, поступивших в продажу, 20 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает.

738. Фабрика выпускает сумки. В среднем на 110 качественных сумок приходится пять сумок со скрытыми дефектами. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется качественной. Результат округлите до сотых.

739. На каждой из шести одинаковых карточек напечатана одна из следующих букв: а, т, м, р, с, о. Карточки тщательно перемешаны. Найдите вероятность того, что на четырех вынутых по одной и расположенных в одну линию карточках можно будет прочесть слово «трос». Результат округлите до тысячных.

740. В случайном эксперименте симметричную монету бросают четырежды. Найдите вероятность того, что орел не выпадет ни разу.

741. В ящике 10 одинаковых деталей, помеченных номерами 1, 2, ..., 10. Наудачу извлечены шесть деталей. Найдите вероятность того, что среди извлеченных деталей окажутся детали 1 и 2. Результат округлите до сотых.

742. В конверте среди 100 фотокарточек находится одна разыскиваемая. Из конверта наудачу извлечены 10 карточек. Найдите вероятность того, что среди них окажется нужная.

743. С блюда с 30 пирожками взяли наугад 3. Какова вероятность того, что хотя бы один пирожок окажется с грибами, если их на блюде лежало шесть? Результат округлите до десятых.

744. В группе 12 студентов, среди которых 8 отличников. Отобраны 9 студентов. Найдите вероятность того, что среди отобранных студентов пять отличников. Результат округлите до сотых.

745. В «секретном» замке на общей оси четыре диска, каждый из которых разделен на пять секторов, на которых написаны различные цифры. Замок открывается только в том случае, если диски установлены так, что цифры на них составляют определенное четырехзначное число. Найдите вероятность того, что при произвольной установке дисков замок будет открыт.

Занятие 32

Часть 1. Аудиторная работа

746. На стеллаже библиотеки в случайном порядке расставлено 15 учебников, причем пять из них в переплете. Библиотекарь берет наудачу три учебника. Найдите вероятность того, что все взятые учебники окажутся в переплете. Ответ округлите до сотых.

747. В ящике 10 деталей, из которых четыре окрашены. Сборщик наудачу взял три детали. Найдите вероятность того, что хотя бы одна из взятых деталей окрашена. Ответ округлите до сотых.

748. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,7, а для второго – 0,8. Найдите вероятность того, что при одном залпе в мишень попадут оба стрелка.

749. Вероятность одного попадания в цель при одном залпе из двух орудий равна 0,38. Найдите вероятность поражения цели при одном выстреле первым из орудий, если известно, что для второго орудия эта вероятность равна 0,8.

750. Отдел технического контроля проверяет изделия на стандартность. Вероятность того, что изделие стандартно, равна 0,9. Найдите вероятность того, что из двух проверенных изделий только одно стандартное.

751. Из партии изделий товаровед отбирает изделия высшего сорта. Вероятность того, наудачу взятое изделие окажется высшего сорта, равна 0,8. Найдите вероятность того, что из трех проверенных изделий только два изделия высшего сорта.

752. Брошены три игральные кости. Найдите вероятность того, что на каждой из выпавших граней появится пять очков. Ответ округлите до тысячных.

753. В читальном зале имеется шесть учебников по теории вероятностей, из которых три в переплете. Библиотекарь наудачу взял два учебника. Найдите вероятность того, что оба учебника в переплете.

754. Среди 100 лотерейных билетов есть 5 выигрышных. Найдите вероятность того, что 2 наудачу выбранные билета окажутся выигрышными. Ответ округлите до тысячных.

755. В ящике 10 деталей, из них шесть окрашенных. Сборщик наудачу извлекает четыре детали. Найдите вероятность того, что все извлеченные детали окажутся окрашенными. Ответ округлите до сотых.

756. Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Найдите вероятность того, что студент знает предложенные ему экзаменатором три вопроса. Ответ округлите до десятых.

757. В мешочке содержится 10 одинаковых кубиков с номерами от 1 до 10. Наудачу извлекают по одному три кубика. Найдите вероятность того, что последовательно появятся кубики с номерами 1, 2, 3. Ответ округлите до тысячных.

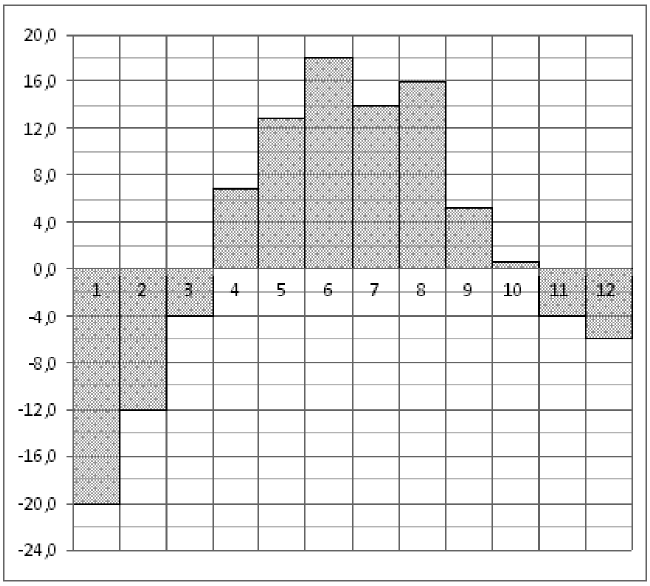
Ответы

746	**747**	**748**	**749**	**750**	**751**
0,02	0,17	0,56	0,7	0,18	0,384
752	**753**	**754**	**755**	**756**	**757**
0,005	0,2	0,002	0,07	0,5	0,001

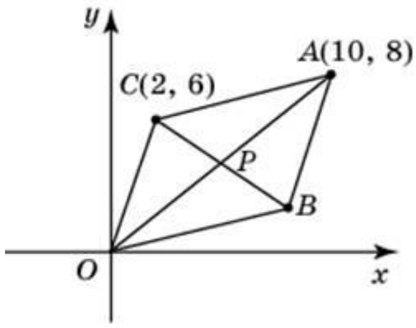
Часть 2. Самостоятельная работа

758. Какой будет концентрация раствора (в процентах), если смешать 2 кг 42%-го и 3 кг 54%-го растворов кислоты?

759. На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Екатеринбурге за каждый месяц 1973 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали – температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме разность между наибольшей и наименьшей среднемесячными температурами в 1973 году. Ответ дайте в градусах Цельсия.



760. Точки $O(0,\,0)$, $A(10,\,8)$, $C(2,\,6)$ и B являются вершинами параллелограмма. Найдите ординату точки B.



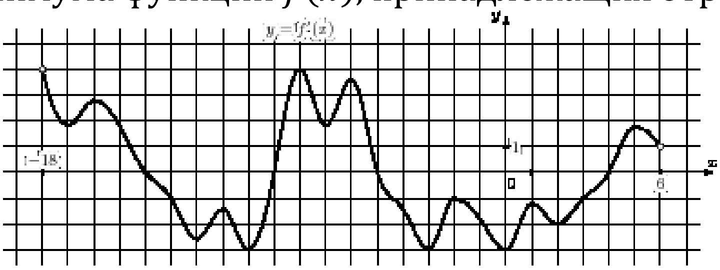
761. В первом банке один доллар США можно купить за 31,1 рубля. Во втором банке 140 долларов – за 4340 рублей. В третьем банке 50 долларов стоят 1545 рублей. Какую наименьшую сумму (в рублях) придется заплатить за 120 долларов США?

762. Решите уравнение $\sin\frac{\pi(x-3)}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. В ответе напишите наименьший положительный корень.

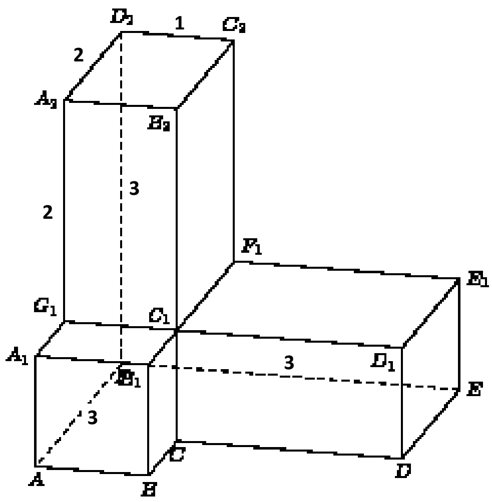
763. Три стороны описанного около окружности четырехугольника относятся (в последовательном порядке) как 1 : 8 : 23. Найдите большую сторону этого четырехугольника, если известно, что его периметр равен 48.

764. Найдите значение выражения $\log_a(ab^2)$, если $\log_b a = \frac{2}{11}$.

765. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале (–18; 6). Найдите количество точек минимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку [–13; 1].



766. Найдите угол AD_2E многогранника, изображенного на рисунке. Все двугранные углы многогранника прямые. Ответ дайте в градусах.



767. Перед началом первого тура чемпионата по настольному теннису участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 26 спортсменов, среди которых – 13 участников из России, в том числе Владимир Егоров. Найдите вероятность того, что в первом туре Владимир Егоров будет играть с каким-либо спортсменом из России?

768. Радиусы трех шаров равны 1, 6 и 8. Найдите радиус шара, объем которого равен сумме их объемов.

769. Для определения эффективной температуры звезд используют закон Стефана–Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела прямо пропорциональна площади его поверхности и четвертой степени температуры: $P = \delta S T^4$, где $\delta = 5{,}7 \cdot 10^{-8}$ – числовой коэффициент, площадь измеряется в квадратных метрах, температура – в градусах Кельвина. А мощность – в ваттах. Известно, что некоторая звезда имеет площадь $S = \frac{1}{16} \cdot 10^{16}$ м^2, а излучаемая ею мощность P не менее $46{,}17 \cdot 10^{17}$, определите наименьшую возможную температуру этой звезды.

770. Из пунктов A и B одновременно навстречу друг другу вышли два пешехода. После встречи первый дошел до B за 16 минут, а второй до A за 25 минут. Сколько времени находился в пути пешеход, идущий с меньшей скоростью?

771. Найдите точку максимума функции $y = (x^2 - 17x + 17)e^{7-x}$.

Ответы

Занятие 1

13	14	15	16	17	18	19	20
291,2	64	68	20	360	5	7	156 000

Занятие 2

33	34	35	36	37	38	39	40
3 060	16 900	7 700	353	51 154	285	2,5	2,25

Занятие 3

57	58	59	60	61	62	63	64
11	30	6 000	400	4 000	2,8	35	1,2

Занятие 4

74	75	76	77	78	79	80	81
353	32	3	10	72	1 020	0,8	7

Занятие 5

96	97	98	99	100	101	102
24	0,75	2	0,5	0,8	4	2

Занятие 6

113	114	115	116	117
14	12	14	4,8	32

Занятие 7

132	133	134	135	136	137	138	139
16	15	4	6	16	90	8	3,75

Занятие 8

154	155	156	157	158	159	160	161	162
18 400	– 0,2	0,75	1 510	3,6	40	200	9	8

Занятие 9

177	178	179	180
$\frac{2\pi n}{3}$	$(-1)^n\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}, n\in Z$	$\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$	$\pm\frac{5\pi}{12}+\pi n, n\in Z$
181	**182**	**183**	**184**
$\pm\frac{2\pi}{3}+4\pi n, n\in Z$	$\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z$	0	$-\frac{\pi}{4}$

Занятие 10

197	198	199	200	201	202
$(-1)^n\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z$	3	– 1	6	10	1,5

Занятие 11

215	216	217	218	219	220
– 15	– 2	3	$-\frac{\pi}{4}+\pi k, k \in Z$	1	2

Занятие 12

233	234	235	236	237	238	239	240	241
6	0,8	4	210	9	– 135	4	$\frac{\pi}{2}$	29

Занятие 13

256	257	258	259	260	261	262	263
корней нет	30	– 1	3	8	0,2	0,5	7

Занятие 14

278	279	280	281	282	283	284	285
5	– 1	12	0	– 57	0,25	0	3

Занятие 15

300	301	302	303	304	305	306	307
0,16	25	1	9	7	– 3	2	– 0,5

Занятие 16

322	323	324	325	326	327	328	329	330
6 840	– 20	0,5	2,5	8	7	37,5	60	0,5; 2

Занятие 17

361	362	363	364	365	366	367
1	3	3	2	3	2	4
368	**369**	**370**	**371**	**372**	**373**	**374**
300	120	12	2,5	10	60	500

Занятие 18

403	404	405	406	407	408
3	– 3	1,5	5	0	2
409	**410**	**411**	**412**	**413**	**414**
6	– 1	– 3	90	0,125	20

Занятие 19

429	430	431	432	433	434	435	436	437	438
– 12	108	1	– 245	2	– 7	0	6	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$; 0	2

Занятие 20

457	458	459	460	461	462	463	464	465	466	467
7	11	2	0,4	6 740	5	21	2	13,75	9	21

Занятие 21

480	481	482	483	484	485	486	487
2	0	2	0,5	1,5	2	– 2	3

Занятие 22

500	501	502	503	504	505	506	507
4	1	1	45	5	– 2	4	– 10

Занятие 23

520	521	522	523	524	525	526	527
$(0; 4]$	2	1,4	$(-0{,}5; +\infty)$	2	– 1	5	1

Занятие 24

540	541	542	543	544	545	546	547	548	549	550
11	4	29	6	1 110	9	15	0,6	500	5	192

Занятие 25

569	570	571	572	573	574	575	576	577
8	27	3	3	4096	48	1	0,3	0,35

Занятие 26

596	597	598	599	600	601	602	603	604
850	150	152,5	73,5	24	24	84	864	9

Занятие 27

623	624	625	626	627	628	629	630	631
16	2	45	80	106	52	48	134	4

Занятие 28

650	651	652	653	654	655	656	657	658	659	660	661
7	5	5	60	2,5	7,5	40	2	18	11	20	4

Занятие 29

680	681	682	683	684	685	686	687	688	689
551	130	42	6	12	48	40	32	6 336	1 024

Занятие 30

708	709	710	711	712	713	714	715	716	717
6 912	210	60	6	3 024	110	129	729	840	900

Занятие 31

736	737	738	739	740	741	742	743	744	745
0,22	0,99	0,96	0,03	0,0625	0,33	0,1	0,5	0,25	0,0016

Занятие 32

758	759	760	761	762	763	764	765	766	767	768	769	770	771
49,2	38	2	3 708	2	23	12	1	60	0,48	9	600	45	17

Библиографический список

Алгебра: сборник заданий для подготовки к государственной итоговой аттестации в 9 кл. / Л. В. Кузнецова, С. Б. Суворова, Е. А. Бунимович и др. – М.: Просвещение, 2010. – 239 с.

Высоцкий И. Р. ЕГЭ 2010. Математика. Задача B5: Рабочая тетрадь / Под ред. А. Л. Семенова, И. В. Ященко. – М.: МЦНМО, 2010. – 80 с.

Высоцкий И. Р., Ященко И. В. ЕГЭ 2012. Математика. Задача B10. Теория вероятностей: Рабочая тетрадь / Под ред. А. Л. Семенова, И. В. Ященко. – М.: МЦНМО, 2012. – 48 с.

Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высшее образование, 2007. – 404 с.

Гущин Д. Д., Малышев А. В. ЕГЭ 2011. Математика. Задача B10. Задачи прикладного содержания: Рабочая тетрадь / Под ред. А. Л. Семенова, И. В. Ященко. – М.: МЦНМО, 2011. – 72 с.

ЕГЭ 2010. Математика. Универсальные материалы для подготовки учащихся. – М: Интеллект-Центр, 2010. – 96 с.

ЕГЭ 2011. Математика. Типовые тестовые задания / И. Р. Высоцкий, Д. Д. Гущин, П. И. Захаров и др.; под ред. А. Л. Семенова, И. В. Ященко. – М: Экзамен, 2011. – 55 с.

ЕГЭ 2011. Математика. Типовые тестовые задания / И. Р. Высоцкий, Д. Д. Гущин, П. И. Захаров и др.; под ред. А. Л. Семенова, И. В. Ященко. – М.: Экзамен, 2011. – 63 с.

ЕГЭ 2011. Математика. Универсальные материалы для подготовки учащихся / И. Р. Высоцкий, Д. Д. Гущин, П. И. Захаров и др. – М.: Интеллект-Центр, 2011. – 144 с.

Лаппо Л. Д., Попов М. А. ЕГЭ 2011. Математика: Практикум по выполнению типовых тестовых заданий ЕГЭ. – М.: Экзамен, 2011. – 63 с.

Математика. Тематические тесты. Ч. I (базовый уровень). Подготовка к ЕГЭ 2010. 10–11 классы / Под ред. Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова. – Ростов н/Д: Легион-М, 2009. – 272 с.

Математика. Тематические тесты. Ч. II. Подготовка к ЕГЭ 2010. 10–11 классы / Под ред. Ф. Ф. Лысенко. – Ростов н/Д: Легион, 2009. – 176 с.

Посицельская М. А., Посицельский С. Е. ЕГЭ 2011. Математика. Задача B2. Графики и диаграммы: Рабочая тетрадь / Под ред. А. Л. Семенова, И. В. Ященко. – М.: МЦНМО, 2011. – 56 с.

Семенов А. Л. ЕГЭ: 3000 задач с ответами по математике. Все задания группы B / А. Л. Семенов, И. В. Ященко, И. Р. Высоцкий и др.; под ред. А. Л. Семенова, И. В. Ященко. – М.: Экзамен, 2011. – 511 с.

Смирнов В. А. Геометрия. Планиметрия: Пособие для подготовки к ЕГЭ / Под ред. А. Л. Семенова, И. В. Ященко. – М.: МЦНМО, 2009. – 256 с.

Смирнов В. А. ЕГЭ 2010. Математика. Задача B4: Рабочая тетрадь / Под ред. А. Л. Семенова, И. В. Ященко. – М.: МЦНМО, 2010. – 48 с.

Смирнов В. А. ЕГЭ 2010. Математика. Задача B6: Рабочая тетрадь / Под ред. А. Л. Семенова, И. В. Ященко. – М.: МЦНМО, 2010. – 48 с.

Смирнов В. А. ЕГЭ 2011. Математика. Задача B9. Стереометрия: объемы и площади: Рабочая тетрадь / Под ред. А. Л. Семенова, И. В. Ященко. – М.: МЦНМО, 2011. – 80 с.

Шестаков С. А. ЕГЭ 2011. Математика. Задача B11. Исследование функций: Рабочая тетрадь / Под ред. А. Л. Семенова, И. В. Ященко. – М.: МЦНМО, 2011. – 72 с.

Шестаков С. А., Гущин Д. Д. ЕГЭ 2011. Математика. Задача B12. Задачи на составление уравнений: Рабочая тетрадь / Под ред. А. Л. Семенова, И. В. Ященко. – М.: МЦНМО, 2011. – 60 с.

Шноль Д. Э. ЕГЭ 2010. Математика. Задача B1: Рабочая тетрадь / Под ред. А. Л. Семенова, И. В. Ященко. – М.: МЦНМО, 2010. – 40 с.

Ященко И. В., Захаров П. И. ЕГЭ 2011. Математика. Задача B8. Геометрический смысл производной: Рабочая тетрадь / под ред. А. Л. Семенова, И. В. Ященко. – М.: МЦНМО, 2011. – 88 с.

Оглавление

Учебное издание

Горев Павел Михайлович
Воловицкая Мария Олеговна

Математика. Курс подготовки к ЕГЭ

Редактор *Ю. Болдырева*
Технические редакторы *М. Воловицкая, П. Горев*
Верстка *П. Горев*

Подписано в печать 15.10.2012. Формат 60x84/16.
Гарнитура «Cambria». Бумага офсетная.
Усл. п. л. 8,2. Тираж 500 экз. Заказ №   .

Издательство Вятского государственного
гуманитарного университета
610002, г. Киров, ул. Красноармейская, 26