МАТЕМАТИКА ЕГЭ 2011
(типовые задания С6)

ЗАДАЧИ НА ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА
(от учебных задач до олимпиадных)

Корянов А.Г., *г. Брянск*, akoryanov@mail.ru
Прокофьев А.А., *г. Москва*, aaprokof@yandex.ru

СОДЕРЖАНИЕ

1. Делимость целых чисел

1.1. Деление без остатка

Свойства делимости целых чисел

Пусть n – целое число ($n \in \mathbf{Z}$), m – натуральное число $(m \in \mathbf{N})$. Говорят, что n *делится на* m, если существует целое число p $(p \in \mathbf{Z})$ такое, что

$$n = mp$$

Число m, называется *делителем* числа n, p – *частным* от деления a на m.

Наибольшее натуральное число, являющееся натуральным делителем каждого из натуральных чисел m и n, называют *наибольшим общим делителем* этих чисел и обозначают НОД(m, n) или просто (m, n).

Например, если $m = 36$ и $n = 84$ то НОД(36, 84) = 12.

Два натуральных числа m и n называют *взаимно простыми* и пишут $(m, n) = 1$, если единственным общим натуральным делителем этих чисел является число единица.

Например, числа 12 и 35 взаимно просты, так как натуральными делителями числа 12 являются числа 1, 2, 3, 4, 6, а натуральными делителями числа 35 являются числа 1, 5, 7.

Перечислим свойства делимости суммы (разности) и произведения чисел, считая, что $a \in \mathbf{Z}$, $b \in \mathbf{Z}$, $m \in \mathbf{N}$.

1. Если a и b делятся на m, то числа $a + b$ и $a - b$ также делятся на m.

2. Если a и b делятся на m, то при любых целых числах k и l число $ak + bl$ также делится на m.

3. Если a делится на m, а b не делится на m, то числа $a + b$ и $a - b$ также не делятся на m.

4. Если a делится на m, а m делится на $k \in \mathbf{N}$, то число a также делится на k.

5. Если a делится на m, а b не делится на m, то число ab делится на m.

6. Если a делится на каждое из чисел m и k, причем $(m, k) = 1$, то a делится на произведение mk.

7. Если a делится на m, то ak делится на mk при любом $k \in \mathbf{N}$.

8. Если ab делится на m и b взаимно просто с m, то a делится на m.

Ограничимся доказательством свойства 1.

Доказательство. Если целые числа a и b делятся на m, то существуют числа $p \in \mathbf{Z}$ и $q \in \mathbf{Z}$ такие, что $a = mp$, $b = qm$. Отсюда следует, что

$$a + b = mp + mq = (p+q)m,$$
$$a - b = mp - mq = (p-q)m.$$

Так как числа $p+q$ и $p-q$ – целые, то числа $a+b$ и $a-b$ делятся на m. Свойство доказано.

Пример 1. *Натуральное число* $3n+2$ *и* $8n+3$ *делятся на натуральное число* $p \neq 1$. *Найти* p.

Решение. Так как числа $3n+2$ и $8n+3$ делятся p, то и число $8\cdot(3n+2) - 3(8n+3) = 7$ должно делиться на p. Но единственное натуральное число $p \neq 1$, на которое делится 7, равно 7. Значит $p = 7$. Например, при $n = 4$ получаем числа 14 и 35, которые делятся на 7.

***Ответ*: $p = 7$.**

Простые и составные числа

Натуральное число p называется *простым*, если $p > 1$ и p не имеет положительных делителей, отличных от 1 и p.

Из определений легко следует, что если p и p_1 – простые числа и p делит p_1, то $p = p_1$. Кроме того, для любого натурального числа его наименьший отличный от единицы положительный делитель является простым числом.

Натуральное число $n > 1$ называется *составным*, если n имеет, по крайней мере, один положительный делитель, отличный от 1 и n.

Число 1 не считается ни простым, ни составным.

Пример 2. *Доказать, что число* $a = 4\cdot 16^{12} - 2^{40}$ *делится на* 33.

Решение. Так как $4\cdot 16^{12} = 2^2 \cdot 4^{48} = 2^{50}$, то

$$a = 2^{50} - 2^{40} = 2^{40}(2^{10} - 1) =$$
$$= 2^{40}(2^5 - 1)(2^5 + 1) = 2^{40}\cdot 32 \cdot 33,$$

откуда следует, что a делится на 33.

Пример 3. *Доказать, что число* $a = 8n^2 + 10n + 3$ *является составным при любом натуральном* n.

Решение. Число a является составным при любом натуральном n, поскольку $a = 8n^2 + 10n + 3 = (2n+1)(4n+3)$, где числа $2n+1$ и $4n+3$ натуральные, большие единицы.

Пример 4. (МИОО, 2010). *Произведение нескольких различных простых чисел делится на каждое из этих чисел, уменьшенное на* 1. *Чему может быть равно это произведение*?

Решение. Пусть искомое число $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$, где $p_1, p_2, \ldots, p_k$ – простые числа и $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$. Так как n делится на каждое из чисел $p_1 - 1, p_2 - 1, \ldots, p_k - 1$, а они все, кроме возможно числа $p_1 - 1$, – четные. Это значит, что среди сомножителей $p_1, p_2, \ldots, p_k$ присутствует число 2, т.е. $p_1 = 2$. Тогда $n = 2\cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$.

Рассмотрим число $p_k - 1 = 2q_k$. По условию число $2q_k$ делит $n = 2\cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$. Это значит, что q_k является делителем числа $p_2 \cdot \ldots \cdot p_{k-1}$. Это возможно, если q_k есть некоторое число или произведение некоторого набора чисел из набора $p_2, \ldots, p_{k-1}$.

Учитывая это условие и то, что число $n_1 = 2\cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_{k-1}$ обладает тем же свойством, что и число n, получаем способ получения искомых произведений: на каждом этапе следующий множитель p_k определяется набором множителей $2, p_2, \ldots, p_{k-1}$.

Поэтому будем строить искомые произведения начиная с двух сомножителей.

1. Пусть $k = 2$. Тогда $n = 2\cdot p_2$. Учитывая, что $p_2 - 1 = 2q_2$ и $2q_2$ делит число 2,

получаем $q_2 = 1$. Тогда $p_2 = 3$ и $n = 2 \cdot 3 = 6$.

2. Пусть $k = 3$. Тогда $n = 2 \cdot 3 \cdot p_3$. Учитывая, что $p_3 - 1 = 2q_3$ и $2q_3$ делит число $2 \cdot 3$, получаем $q_3 = 3$. Тогда $p_3 = 7$ и $n = 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$.

3. Пусть $k = 4$. Тогда $n = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot p_4$. Учитывая, что $p_4 - 1 = 2q_4$ и $2q_4$ делит число $2 \cdot 3 \cdot 7$, получаем возможные значения $q_4 = 3$ или $q_4 = 7$, или $q_4 = 3 \cdot 7 = 21$. Тогда $p_4 = 7$ (уже есть такой множитель) или $p_3 = 15$ (не простое число), или $p_4 = 43$. Тогда $n = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 43 = 1806$.

4. Пусть $k = 5$. Тогда $n = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 43 \cdot p_5$. Учитывая, что $p_5 - 1 = 2q_5$ и $2q_5$ делит число $2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 43$, получаем возможные значения q_5 и p_5:

$q_5 = 3$, $p_5 = 7$ (такой множитель есть);

$q_5 = 7$, $p_5 = 15$ (не простое число);

$q_5 = 3 \cdot 7$, $p_5 = 43$ (такой множитель есть);

$q_5 = 43$, $p_5 = 87$ (не простое число, делится на 3);

$q_5 = 3 \cdot 43$, $p_5 = 257$ (не простое число, делится на 7);

$q_5 = 7 \cdot 43$, $p_5 = 603$ (не простое число, делится на 3);

$q_5 = 3 \cdot 7 \cdot 43$, $p_5 = 1807$ (не простое число, делится на 13).

Следовательно, искомого произведения из пяти сомножителей не существует, а значит не существует подобных произведений и с большим числом сомножителей.

Ответ: 6, 42, 1806.

Теорема 1 (*Евклида*). Множество положительных простых чисел бесконечно.

Доказательство. Предположим, что множество положительных простых чисел конечно и состоит из чисел $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Рассмотрим число $p = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k + 1$. Тогда либо натуральное число p, большее единицы, само является простым, либо оно разложимо в произведение положительных простых чисел и поэтому обладает хотя бы одним простым делителем. По предположению p не может быть простым, так оно не совпадает ни с одним из чисел $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Если же p разложимо, то его делитель должен быть отличен от чисел $p_1, p_2, \ldots, p_k$, так как в противном случае этот делитель делит числа $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$ и p, а значит делит и разность $p - p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k = 1$, а это невозможно. Следовательно, простых чисел бесконечно.

Простые числа, хотя их и бесконечно много, составляют небольшую часть всех натуральных чисел, что выражается следующей теоремой.

Теорема 2. Для любого целого числа $k \geq 1$ в натуральном ряду можно найти k составных чисел, непосредственно следующих друг за другом.

Доказательство. Возьмем число $n = (k+1)!$ и рассмотрим k следующих друг за другом чисел $n_1 = n + 2$, $n_2 = n + 3$, … , $n_k = n + (k+1)$. Каждое число в этом списке является составным, так как n_1 делится на 2, n_2 – на 3, n_3 – на 4, … , n_k – на $k+1$. Теорема доказана.

Теорема 3. Если произведение нескольких натуральных чисел делится на простое число, то на него делится хотя бы один из сомножителей.

Доказательство. Возьмем канонические разложения входящих в произведение натуральных чисел. Так как произведение этих чисел делится на простое число, то это простое число должно присутствовать хотя бы в одном каноническом разложении множителей. Следовательно, на это число делятся все множители, в каноническом разложении которых присутствует это число. Теорема доказана.

Каноническое разложение натурального числа

Представление натурального числа n в виде произведения двух натуральных чисел ab называется *разложением на множители*. Представление числа в виде произведения простых чисел называется *разложением на простые множители.* Считается, что если n – простое число, то оно имеет разложение на простые множители, состоящее из одного числа n.

Два разложения на множители называются *одинаковыми*, если они отличаются только порядком множителей. Например, разложения $42 = 2\cdot 3\cdot 7$ и $42 = 7\cdot 2\cdot 3$ считаются одинаковыми.

Теорема 4 (*основная теорема арифметики*). Для каждого натурального числа $n > 1$ существует единственное разложение на простые множители.

Это значит, что для любого натурального числа два разложения на простые множители могут отличаться только порядком этих множителей.

Каноническим разложением целого числа $n > 1$ называется представление n в виде

$$n = p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdot\ldots\cdot p_s^{k_s}, \qquad (1)$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_s$ – попарно различные простые числа, а $k_1, k_2, \ldots, k_s$ – натуральные числа. Для отрицательных целых чисел $n < -1$ каноническим разложением считается представление в виде $n = -p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdot\ldots\cdot p_s^{k_s}$.

Пусть число p – наименьший среди простых делителей $p_1, p_2, \ldots, p_s$. Тогда $n = p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdot\ldots\cdot p_s^{k_s} \ge p^2$. Отсюда, $p \le \sqrt{n}$. Следовательно, если n – составное число, то оно имеет простой делитель p такой, что $p \le \sqrt{n}$. Если число n не имеет простых делителей, не превосходящих $\sqrt{n}$, то n – простое число.

Пример 5. *Сколько существует способов разложения числа* $n = p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdot\ldots\cdot p_s^{k_s}$ *в произведение двух взаимно простых множителей?*

Решение. Пусть имеется разложение $n = n_1\cdot n_2$, где числа n_1 и n_2 – взаимно просты, т.е. $(n_1, n_2) = 1$. Это будет возможно в случае, когда эти числа не содержат ни одного общего множителя p_i ($1 \le i \le s$). Поэтому искомое количество способов разложения будет равно количеству способов разбиения множества чисел $\{p_1, p_2, \ldots, p_s\}$ на две непересекающиеся группы.

Рассмотрим строчки $(\underbrace{\ ,\ \ ,\ldots,\ }_{s\text{ позиций}})$, в которых в i-й позиции стоит 1, если p_i входит в множитель n_1, и 0, если p_i входит в множитель n_2. Для заполнения каждой позиции имеется 2 способа. Всего s позиций. Две позиции можно заполнить $2\cdot 2 = 2^2$ способами, три – $2\cdot 2\cdot 2 = 2^3$ и т.д. Соответственно, всего имеется 2^s различных строчек. Исключая строчки из одних 1 (в этом случае $n_1 = n$) и одних 0 (в этом случае $n_2 = n$), получаем искомое число, равное $2^s - 2$.

Ответ: $2^s - 2$.

НОД и НОК

Наибольшим общим делителем (НОД) натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называется наибольшее натуральное число, на которое делятся данные числа. *Наименьшим общим кратным* (НОК) – наименьшее натуральное число, делящееся на каждое из этих чисел. Наибольший общий делитель чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ обозначают $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, а наименьшее общее кратное – $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$. В частности, (a, b) – НОД чисел a и b, а $[a, b]$ – НОК этих чисел.

Отметим, что

- *НОД* $(a;b) =$ *НОД* $(a;\, a+b)$;
- *НОД* $(a;b) =$ *НОД* $(a;\, a-b)$.

Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называются *взаимно простыми*, если $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 1$ и *попарно взаимно простыми*, если любые два из них взаимно просты, т.е. $(a_i, a_j) = 1$ при $i \ne j$. Попарно взаимно простые числа являются взаимно простыми (в совокупности). Обратное утверждение неверно, как показывает следующий пример: числа $n_1 = 3$, $n_2 = 2\cdot 3$, $n_3 = 2\cdot 5$ и $n_4 = 3\cdot 5$ не являются взаимно простыми, а $(n_1, n_2, n_3, n_4) = 1$.

Отметим, что

● Если целые числа a и b взаимно просты, то их сумма $a+b$ и произведение ab также являются взаимно простыми числами.

● Если целые числа a и b являются взаимно простыми, то $НОД\ (a+b; a-b)$ равен 1 или 2.

Доказательство. Положим

$$НОД(a+b;\ a-b) = d\ .$$

Тогда $(a+b)\,|\,d$, $(a-b)\,|\,d$. Следовательно, сумма и разность чисел $a+b$ и $a-b$, равные соответственно $2a$ и $2b$ делятся на d. Но числа a и b по условию взаимно просты, поэтому 2 делится на d: $2\,|\,d$. Отсюда $d=1$ или $d=2$. Оба эти случая возможны. Действительно, $d=1$, если числа a и b разной четности, и $d=2$, если они нечетны.

● Любые два последовательных натуральных числа взаимно просты.

● Наибольший общий делитель любых двух последовательных четных натуральных чисел равен 2.

● Любые два последовательных нечетных натуральных числа взаимно просты.

● Если целые числа a и b являются взаимно простыми, то НОД$(a+b; a^2-ab+b^2)$ равен 1 или 3.

● Если натуральные числа m и n взаимно просты, то $НОД(m+n; m^2+n^2)$ равен 1 или 2.

Доказательство. Пусть d – общий делитель чисел $m+n$ и m^2+n^2. Тогда на d делится также число $(m+n)^2$, а значит, и число $(m+n)^2-(m^2+n^2)=2mn$.

Итак, d является общим делителем чисел $m+n$ и $2mn$. Но $m+n$ и m не могут иметь общих делителей, отличных от 1 (так как m и n взаимно просты), и тоже справедливо для чисел $m+n$ и n. Следовательно, d является делителем числа 2, т.е. $d=1$ или $d=2$.

Теорема 5. Пусть n – натуральное число и $n = p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdot\ldots\cdot p_s^{k_s}$ – его каноническое разложение на простые множители. Тогда каждый натуральный делитель d числа n может быть записан в виде $d = p_1^{m_1}\cdot p_2^{m_2}\cdot\ldots\cdot p_s^{m_s}$, где m_i – целые числа, удовлетворяющие условиям $0\le m_1\le k_1$, …, $0\le m_s\le k_s$.

Доказательство. Пусть d – какой-либо делитель натурального числа n. Так как каждый простой делитель числа d является делителем числа n, тогда в разложении d на простые множители могут встречаться только числа из множества $\{p_1, p_2, \ldots, p_s\}$. Поэтому число d представимо в виде $d = p_1^{m_1}\cdot p_2^{m_2}\cdot\ldots\cdot p_s^{m_s}$. Теорема доказана.

Теорема 6. Пусть даны два натуральных числа a и b, а $p_1, p_2, \ldots, p_s$ – простые числа, входящие в канонические разложения a и b. Представим числа a и b в виде $a = p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdot\ldots\cdot p_s^{k_s}$ и $b = p_1^{m_1}\cdot p_2^{m_2}\cdot\ldots\cdot p_s^{m_s}$ где $m_i\ge 0$, $k_i\ge 0$ – целые числа. Тогда

$$(a,b) = p_1^{\min(k_1,\ m_1)}\cdot p_2^{\min(k_2,\ m_2)}\cdot\ldots\cdot p_s^{\min(k_s,\ m_s)},$$

$$[a,b] = p_1^{\max(k_1,\ m_1)}\cdot p_2^{\max(k_2,\ m_2)}\cdot\ldots\cdot p_s^{\max(k_s,\ m_s)}.$$

Например, пусть $a = 2^3\cdot 3^2\cdot 7$, $b = 2^4\cdot 3\cdot 5^2\cdot 11$. Запишем их в виде $a = 2^3\cdot 3^2\cdot 5^0\cdot 7^1\cdot 11^0$, $b = 2^4\cdot 3^1\cdot 5^2\cdot 7^0\cdot 11^1$. Тогда

$$(a,b) = 2^3\cdot 3^1 = 24,$$

$$[a,b] = 2^4\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7^1\cdot 11^1 = 277\,200.$$

Замечание. Справедливо равенство

$$(a,b)\cdot[a,b] = a\cdot b\,.$$

Пример 6. *Найти* (5160, 16920) *и* [5160, 16920].

Решение. Напишем канонические разложения чисел 5160 и 16920:

$$5160 = \underbrace{2\cdot 5}_{10}\cdot\underbrace{2\cdot 2\cdot\overbrace{3\cdot 43}^{129}}_{564} = 2^3\cdot 3\cdot 5\cdot 43,$$

$$16920=\underbrace{2\cdot 5}_{10}\cdot\underbrace{2\cdot 2\cdot\overbrace{3\cdot 3\cdot 47}^{423}}_{1692}=2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 47.$$

Тогда

$$(5160,16920)=2^3\cdot 3^1\cdot 5^1\cdot 43^0\cdot 47^0=120,$$
$$[5160,16920]=2^3\cdot 3^2\cdot 5^1\cdot 43^1\cdot 47^1=727560.$$

Ответ: 120, 727560.

Существует еще один способ нахождения НОД двух чисел, называемый алгоритмом Евклида, использующий деление чисел с остатком.

Пример 7. *Найти все пары натуральных чисел, наименьшее общее кратное которых равно* 78, *а наибольший общий делитель равен* 13.

Решение. Пусть a и $b-$ искомые числа, По условию $(a,b)=13$. Значит $a=13\cdot a_1$ и $b=13\cdot b_1$. Так как $[a,b]=78$, а $78=6\cdot 13$, то, используя равенство

$$(a,b)\cdot[a,b]=a\cdot b,$$

получаем $a\cdot b=13^2\cdot a_1\cdot b_1=13^2\cdot 6$. Отсюда получаем $a_1\cdot b_1=6$. Следовательно, возможны случаи $a_1=1$, $b_1=6$ и $a_1=2$, $b_1=3$ (или $a_1=6$, $b_1=1$ и $a_1=3$, $b_1=2$). Тогда получаем две пары чисел, удовлетворяющие условию задачи $(13,78)$ и $(26,39)$.

Ответ: $(13,78)$, $(26,39)$.

Пример 8. (МИОО, 2010). *Найти наибольший общий делитель всех чисел вида* p^2-1, *где* $p-$ *простое число, большее* 3, *но меньшее* 2010.

Решение. Запишем

$$p^2-1=(p-1)(p+1).$$

Заметим, что $p-1$, p и $p+1-$ три числа, следующие в ряду натуральных чисел друг за другом. Значит, одно из них обязательно делится на 3. Так как $p-$ простое, большее 3, то на 3 делится либо $p-1$, либо $p+1$. Кроме того, $p-1$ и $p+1-$ два четных числа, следующие в ряду натуральных чисел друг за другом. Значит, одно из них делится на 4. Отсюда получаем, что в произведении $(p-1)(p+1)$ какой-то из множителей делится на 3, один делится на 2, а другой на 4, т.е. это произведение делится на 24.

Так как при $p=5$ получаем $p^2-1=24$, то 24 – наибольший общий делитель всех чисел вида p^2-1, где $p-$ простое число (в том числе и меньшее 2010).

Ответ: 24.

Пример 9. (МГУ, 1978). *Множество* A *состоит из различных натуральных чисел. Количество чисел в* A *больше семи. Наименьшее общее кратное всех чисел из* A *равно* 210. *Для любых двух чисел из* A *их наибольший общий делитель больше единицы. Произведение всех чисел из* A *делится на* 1920 *и не является квадратом никакого целого числа. Найти числа, из которых состоит* A.

Решение. Разложим наименьшее общее кратное на простые множители $210=2\cdot 3\cdot 5\cdot 7$. Тогда в соответствии с теоремой 6 все числа, входящие в A, должны иметь вид $2^{k_2}\cdot 3^{k_3}\cdot 5^{k_5}\cdot 7^{k_7}$, где k_2,k_3,k_5,k_7 принимают значения либо 0 либо 1. Перебирая возможные варианты, получаем, что искомые числа будут содержаться среди чисел, приведенных ниже:

$2^1\cdot 3^0\cdot 5^0\cdot 7^0=2$; $2^0\cdot 3^1\cdot 5^0\cdot 7^0=3$;
$2^0\cdot 3^0\cdot 5^1\cdot 7^0=5$; $2^0\cdot 3^0\cdot 5^0\cdot 7^1=7$;

$2^1\cdot 3^1\cdot 5^0\cdot 7^0=6$; $2^1\cdot 3^0\cdot 5^1\cdot 7^0=10$;
$2^1\cdot 3^0\cdot 5^0\cdot 7^1=14$; $2^0\cdot 3^1\cdot 5^1\cdot 7^0=15$;
$2^0\cdot 3^1\cdot 5^0\cdot 7^1=21$; $2^0\cdot 3^0\cdot 5^1\cdot 7^1=35$;

$2^1\cdot 3^1\cdot 5^1\cdot 7^0=30$; $2^1\cdot 3^1\cdot 5^0\cdot 7^1=42$;
$2^1\cdot 3^0\cdot 5^1\cdot 7^1=70$; $2^0\cdot 3^1\cdot 5^1\cdot 7^1=105$;

$2^1\cdot 3^1\cdot 5^1\cdot 7^1=210$.

Поскольку делитель произведения всех чисел из множества A представляется в виде $1920=2^7\cdot 3\cdot 5$, то множество A содержит не менее 7 четных чисел. Всего получилось 8 четных чисел: 2, 6, 10, 14, 30, 42, 70, 210. Их произведение равно $2^8\cdot 3^4\cdot 5^4\cdot 7^4$ и является полным квадратом, что противоречит условию. Добавление к этим числам любого нечетного числа (3, 5, 7, 15, 21, 35, 105) будет противоречить условию, что для любых двух чисел из A их наибольший общий делитель больше единицы.

Из перечисленных нечетных чисел только число 105 является взаимно простым только с одним четным числом – 2. Остальные нечетные числа взаимно просты с большим числом четных чисел из приведенных.

Следовательно, условие задачи будет выполнено, если из множества всех перечисленных четных чисел будет исключено число 2 и будет добавлено число 105. Получаем $A = \{6, 10, 14, 30, 42, 70, 105, 210\}$.

Ответ: $A = \{6, 10, 14, 30, 42, 70, 105, 210\}$.

Количество делителей натурального числа

Теорема 7. Пусть $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{k_s}$ каноническое разложение на простые множители натурального числа n. Тогда число $\tau(n)$ натуральных делителей числа n, включая 1 и само число n, выражается формулой

$$\tau(n) = (k_1 + 1) \cdot (k_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (k_s + 1). \qquad (2)$$

Доказательство. В соответствии с теоремой 5 любой делитель натурального числа n имеет вид $d = p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{m_s}$, где m_i – целые числа, удовлетворяющие условиям $0 \le m_1 \le k_1$, … , $0 \le m_s \le k_s$.

Так как каждому делителю d можно поставить в соответствие упорядоченный набор $(m_1, m_2, \ldots, m_s)$ и наоборот, то количество различных наборов равно количеству различных делителей. Первая позиция в этом наборе может быть заполнена $k_1 + 1$ способами, вторая $k_2 + 1$ способами, …, последняя $k_s + 1$ способом. Первые две позиции можно заполнить $(k_1 + 1) \cdot (k_2 + 1)$. Далее используя метод математической индукции легко получить, что имеется $(k_1 + 1) \cdot (k_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (k_s + 1)$ различных таких строк, т.е.

$$\tau(n) = (k_1 + 1) \cdot (k_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (k_s + 1).$$

Теорема доказана.

Пример 10. *Найти число различных делителей числа* 1440, *включая единицу и само число.*

Решение. Запишем каноническое разложение числа 1440. Так как $1440 = 5 \cdot 288 = 5 \cdot 9 \cdot 32$, то

$$1440 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^1.$$

Следовательно,

$$\tau(n) = (5 + 1) \cdot (2 + 1) \cdot (1 + 1) = 36.$$

Ответ: 36.

Пример 11. *Найти все натуральные числа, последняя десятичная цифра которых* 0 *и которые имеют ровно* 15 *различных натуральных делителей (включая единицу и само число).*

Решение. Так как искомые натуральные числа имеют нечетное число делителей 15, то все они являются квадратами. Поскольку $15 = 3 \cdot 5$, то возможные разложения искомых чисел в соответствии с формулой (2) могут иметь вид p^{14} или $q^2 \cdot r^4$, где p, q, r – простые числа. Первый вариант невозможен, так как искомое число должно оканчиваться на 0. Соответственно, 0 на конце можно получить, если $q = 2, r = 5$ или $q = 5, r = 2$. В этих случаях получаются числа $2^2 \cdot 5^4 = 2500$ или $5^2 \cdot 2^4 = 400$.

Ответ: 400 и 2500.

Пример 12. (Московская окружная олимпиада, декабрь 2010). *Натуральное число a имеет ровно четыре различных натуральных делителя (включая единицу и a). Натуральное число b имеет ровно шесть различных натуральных делителей (включая единицу и b). Может ли число $c = ab$ иметь ровно* 15 *различных натуральных делителей (включая единицу и c)?*

Решение. Так как a имеет ровно четыре различных натуральных делителя и возможны два представления числа 4, удовлетворяющее формуле (2) – это $4 = 2 \cdot 2 = (1 + 1)(1 + 1)$ или $4 = (3 + 1)$, то число a представляется в виде $p \cdot q$ или r^3, где $p, q, r -$ простые числа.

Так как b имеет ровно шесть различных натуральных делителя и возможно единственны два разложения, удовлетворяющее формуле (2), – это $6 = 2 \cdot 3 = (1+1)\cdot(2+1)$ или $6 = (5+1)$, то число b представляется в виде $n \cdot m^2$ или t^5, где $n, m, t -$ простые числа.

Число c должно иметь 15 делителей. Возможны следующие разложения числа 15: $15 = (2+1)\cdot(4+1) = (4+1)\cdot(2+1)$ или $15 = (14+1)$. В данной ситуации осуществим только первый вариант, т.е. при $r = n$. В этом случае получаем число $c = r^4 \cdot m^2$, имеющее 15 делителей.

Ответ: Может.

Пример 13. (МИОО, 2010). *Найти все натуральные числа, которые делятся на 42 и имеют ровно 42 различных натуральных делителя (включая 1 и само число).*

Решение. Пусть $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{k_s}$ каноническое разложение на простые множители искомого натурального числа. Количество различных натуральных делителей n задается формулой

$$\tau(n) = (k_1+1)\cdot(k_2+1)\cdot\ldots\cdot(k_s+1).$$

Так как n делится на 42, то его можно записать в виде $n = 42m = 2\cdot 3\cdot 7\cdot m$. Отсюда следует, что простые числа 2, 3, 7 входят в каноническое разложение числа n. В соответствии с формулой для $\tau(n)$ получаем, что в его разложение на множители входит по крайней мере три множителя, не меньшие 2. Но такое разложение единственно

$$\tau(n) = 42 = 2\cdot 3\cdot 7 = (k_1+1)\cdot(k_2+1)\cdot(k_3+1).$$

Таким образом, возможно 6 различных способов разложения числа n, в каждом из которых множители в разложении $\tau(n)$ принимают значения 2, 3, 7. Это значит, что наборы показателей степени (k_1, k_2, k_3) есть $(1, 2, 6)$, $(2, 1, 6)$, $(2, 6, 1)$, $(6, 2, 1)$, $(6, 1, 2)$, $(1, 6, 2)$. Учитывая, что это кратности, с которыми числа 2, 3, 7 входят в каноническое разложение на простые множители искомого натурального числа n, получим, что эти разложения имеют вид

$$2^1\cdot 3^2\cdot 7^6,\ 2^2\cdot 3^1\cdot 7^6,\ 2^2\cdot 3^6\cdot 7^1,$$
$$2^6\cdot 3^2\cdot 7^1,\ 2^6\cdot 3^1\cdot 7^2,\ 2^1\cdot 3^6\cdot 7^2.$$

Ответ: $2^1\cdot 3^2\cdot 7^6$, $2^2\cdot 3^1\cdot 7^6$, $2^2\cdot 3^6\cdot 7^1$, $2^6\cdot 3^2\cdot 7^1$, $2^6\cdot 3^1\cdot 7^2$, $2^1\cdot 3^6\cdot 7^2$.

Следствие из теоремы 7. Если натуральное число n имеет нечетное число натуральных делителей, включая 1 и n, то это число n – полный квадрат.

Пример 14. *Найти количество и сумму всех натуральных чисел, не превосходящих 1000 и имеющих нечетное число делителей.*

Решение. Натуральное число, имеющее нечетное число делителей, является полным квадратом. Следовательно, чтобы ответить на первый вопрос задачи, нужно сосчитать количество чисел, являющихся квадратами и не превосходящими 1000. Наибольшим таким числом является $961 = 31^2$. Значит имеется 31 такое число.

Искомая сумма равна

$$S = 1^2 + 2^2 + \ldots + 31^2.$$

Используя формулу

$$\boxed{S(n) = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

получаем

$$S(31) = 1^2 + \ldots + n^2 = \frac{31\cdot 32\cdot 63}{6} = 10416.$$

Ответ: 31 и 10416.

Пример 15. (Досрочное ЕГЭ, апрель 2011). *Число N равно произведению 11 различных натуральных чисел, больших 1. Какое наименьшее число различных натуральных делителей (включая единицу и само число) может иметь число N?*

Решение. Пусть $N = n_1\cdot n_2\cdot\ldots\cdot n_{11}$, где $n_1, n_2, \ldots, n_{11} -$ различные натуральные числа, большие 1.

Рассмотрим случай, когда $n_1 = a$, $n_2 = a^2$, …, $n_{11} = a^{11}$, где $a -$ некоторое простое число. Тогда

$$N = a \cdot a^2 \cdot \ldots \cdot a^{11} = a^{1+2+\ldots+11} = a^{66}.$$

В этом случае число N имеет 67 различных натуральных делителей: 1, a, a^2, …, a^{66}.

Докажем, что при любых $n_1, n_2, \ldots, n_{11}$ число N не может иметь делителей меньше, чем 67. Действительно, пусть $1 < n_1 < n_2 < \ldots < n_{11}$. Покажем, что у числа N всегда есть, по крайней мере, 67 различных делителей. Укажем их.

Кол-во	Делители
1	$1<$
2	$< n_1 < n_2 <$
3	$< n_1n_2 < n_1n_3 < n_2n_3 <$
4	$< n_1n_2n_3 < n_1n_2n_4 < n_1n_3n_4 < n_2n_3n_4 <$
5	$< n_1n_2n_3n_4 < n_1n_2n_3n_5 < n_1n_2n_4n_5 <$ $< n_1n_3n_4n_3n_5 < n_2n_3n_4n_5 <$
	……
11	$< n_1n_2n_3n_4n_5n_6n_7n_8n_9n_{10} < \cdots <$ $< n_2n_3n_4n_5n_6n_7n_8n_9n_{10}n_{11} <$
1	$< n_1n_2n_3n_4n_5n_6n_7n_8n_9n_{10}n_{11} = N$

Получили $1+2+\ldots+11+1 = 67$ делителей. Значит, меньше, чем 67 делителей у числа N быть не может

***Ответ*: 67.**

Сумма делителей натурального числа

Теорема 8. Пусть $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{k_s}$ каноническое разложение на простые множители натурального числа n. Тогда число $\sigma(n)$, равное сумме всех натуральных делителей числа n, выражается формулой

$$\sigma(n) = (1 + p_1 + p_1^2 + \ldots + p_1^{k_1}) \cdot (1 + p_2 + p_2^2 + \ldots + p_2^{k_2}) \cdot \ldots \cdot (1 + p_s + p_s^2 + \ldots + p_s^{k_s}) \quad (3).$$

Доказательство. Раскрывая скобки в произведении

$$(1 + p_1 + \ldots + p_1^{k_1}) \cdot (1 + p_2 + \ldots + p_2^{k_2}) \times \\ \times \ldots \cdot (1 + p_s + \ldots + p_s^{k_s}),$$

получим сумму всех членов вида $p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{m_s}$, где $0 \le m_1 \le k_1$, … , $0 \le m_s \le k_s$.

Каждое произведение $p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{m_s}$ входит в сумму только один раз и является делителем n. Следовательно, полученная сумма представляет собой сумму $\sigma(n)$ всевозможных делителей числа n.

Эту сумму можно также записать в виде

$$\sigma(n) = \frac{p_1^{k_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \ldots \cdot \frac{p_s^{k_s+1} - 1}{p_s - 1}.$$

Теорема доказана.

Пример 16. *Найти сумму всех различных делителей числа* 1440, *включая единицу и само число.*

Решение. Так как $1440 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^1$, то

$$\sigma(n) = \frac{2^6 - 1}{2 - 1} \cdot \frac{3^3 - 1}{3 - 1} \cdot \frac{5^2 - 1}{5 - 1} = 31 \cdot 13 \cdot 6 = \\ = 2418.$$

***Ответ*: 2418.**

Пример 17. (МИОО, 2010). *Найти натуральное число* N, *имеющее* 6 *делителей, сумма которых равна* 104.

Решение. По формуле (2)

$$\tau(N) = 6 = 2 \cdot 3 = (k_1 + 1) \cdot (k_2 + 1).$$

Следовательно, $N = p_1 \cdot p_2^2$, где p_1, $p_2 -$ некоторые простые числа.

По формуле (3)

$$\sigma(N) = (1 + p_1) \cdot (1 + p_2 + p_2^2) = 104.$$

Так как $1 + p_1 \ge 3$, то рассмотрим всевозможные разложения числа 104 в произведение двух множителей, каждый из которых не меньше 3. Получаем два варианта $104 = 4 \cdot 26 = 8 \cdot 13$.

В первом случае системы не существует простых чисел, являющихся решением получающихся систем уравнений:

$$\begin{cases} 1 + p_1 = 4, \\ 1 + p_2 + p_2^2 = 26 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 1 + p_1 = 26, \\ 1 + p_2 + p_2^2 = 4. \end{cases}$$

Во втором случае из системы уравнений

$$\begin{cases}1+p_1=8,\\ 1+p_2+p_2^2=13\end{cases}$$

получаем $p_1=7,\ p_2=3$.

Система $\begin{cases}1+p_1=13,\\ 1+p_2+p_2^2=8\end{cases}$ не имеет решения

Следовательно, $N=7\cdot 3^2=63$.

Ответ: 63.

Факториал натурального числа

Факториал натурального числа n (обозначается $n!$, произносится *эн факториа́л*) – произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно:

$$n!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n.$$

Пример 18. *Найти наименьшее натуральное число n такое, что n! делится на* 1170.

Решение. Каноническое разложение числа 1170 имеет вид $1170=2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 13$. Отсюда получаем, что в произведении $1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$ должно присутствовать в качестве множителя простое число 13. Наименьшее натуральное число n, удовлетворяющее этому условию есть 13. Отметим, что 13! также делится на 2, $3^2=9$, 7.

Ответ: 13.

Пример 19. *Найти наименьшее натуральное число n такое, что оно не является делителем* 50!.

Решение. Каноническое разложение числа 50! имеем вид:

$$50!=2^{k_2}\cdot 3^{k_3}\cdot 5^{k_5}\cdot\ldots\cdot 47^{k_{47}}.$$

Следовательно, разложение на множители искомого числа должно содержать в качестве сомножителя хотя бы одно простое число отличное от 2, 3, 5, …, 47 или содержать какой-либо сомножитель, представляющий 2 в степени большей k_2 или 3 в степени большей k_3 и т.д.

Легко убедиться, что число 53 удовлетворяет условиям задачи.

Ответ: 53.

Теорема 9. Показатель степени, с которым простое число p входит в каноническое разложение числа $n!$, равен

$$\alpha=\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{p^k}\right], \qquad (4)$$

где k – такое натуральное число, что $p^k<n<p^{k+1}$, а $\left[\frac{n}{p^i}\right]$ означает целую часть числа $\frac{n}{p^i}$ ($i=1,2,\ldots,k$).

Доказательство. Поскольку

$$n!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot p\cdot\ldots\cdot 2p\cdot\ldots\cdot p^2\cdot\ldots\cdot p^3\cdot\ldots\cdot(n-1)n,$$

то число сомножителей, кратных p, равно $\left[\frac{n}{p}\right]$. Среди них кратных p^2 содержится $\left[\frac{n}{p^2}\right]$, кратных p^3 содержится $\left[\frac{n}{p^3}\right]$ и т.д. Сумма (4) и дает искомый результат, так как всякий сомножитель, кратный p^m ($1\le m\le k$), но не кратный p^{m+1}, сосчитан в ней ровно m раз: как кратный p, как кратный p^2, как кратный p^3, …, как кратный p^m. Теорема доказана.

Пример 20. *Найти показатель степени, с которым* 5 *входит в число* 1000!.

Решение. В соответствии с формулой (4) получаем

$$\alpha=\left[\frac{1000}{5}\right]+\left[\frac{1000}{25}\right]+\left[\frac{1000}{125}\right]+\left[\frac{1000}{625}\right]=$$
$$=200+40+8+1=249.$$

Ответ: 249.

Пример 21. (Дистанционный этап олимпиады «Физтех-2011»). *Найти наибольшее натуральное n, для которого число* 6500! *делится на каждое из чисел k^k при $k=1,2,3,\ldots,n$.*

Решение. Так как $80^2<6500<81^2$, то число 6500! точно делится на k^k при $k\le 80$ (так как среди чисел от 1 до 6500 есть по крайней мере k чисел, делящихся на k) и точно не делится на 83^{83} (так как 83 – простое число и среди чисел от 1 до 6500 меньше 83 чисел, делящихся на 83, и нет ни одного, которое делится на 83^2). Остается только проверить, делится ли число 6500! на 81^{81} и 82^{82}.

Заметим, что $81^{81}=3^{324}$. Но уже первое слагаемой в формуле (4) дает $\left[\frac{6500}{3}\right]=2166$, т.е. число 6500! будет делиться на 3^{2166} и уж тем более на $81^{81}=3^{324}$.

Проверим число $82=2\cdot 41$. Число 6500! делится на 2^{82}. Достаточно выяснить делится ли число 6500! на 41^{82}. Заметим, что $\left[\frac{6500}{41}\right]=158$. Следовательно, число 6500! будет делиться на 41^{158} и уж тем более на 41^{82}. Значит, число 6500! делится на 82^{82}.

Ответ: 82.

1.2. Деление с остатком

Не всякое целое число a делится (нацело) на данное натуральное число m.

Деление числа a на число b с остатком есть отыскание наибольшего натурального числа, которое в произведении с делителем дает число, не превышающее делимого: $a=qb+r$, $0\le r<b$. Искомое число q называется *неполным частным*. Разность r между делимым и произведением делителя на неполное частное называется *остатком*. Если остаток равен нулю, то говорят, что a делится на b (без остатка или что число b – делитель числа a).

Теорема 8 (*о делении с остатком*). Для любого целого a и целого $b>0$ существуют и притом единственные целые q и r такие, что

$$a=qb+r,\ \text{где } 0\le r<b. \qquad (5)$$

Доказательство. Рассмотрим рациональное (не обязательно целое) число $\alpha=\frac{a}{b}$. Если $\alpha-$ целое, то возьмем $q=\alpha$. Если же α не целое, то найдутся два соседних целых числа, в промежуток между которыми попадает α. Меньшее из них обозначим q. Тогда $q<\alpha<q+1$, т.е. $q<\frac{a}{b}<q+1$. Умножив все три части этого двойного неравенства на b ($b>0$ по условию), получим

$$bq<a<bq+b,$$

откуда $0<a-bq<b$. Положим $r=a-bq$. Число $r-$ целое. Тем самым существование q и r доказано.

Докажем единственность такого представления. Пусть $a=bq+r$ и $a=bq_1+r_1-$ два таких представления и $q\ne q_1$. Тогда

$$bq+r=bq_1+r_1,$$
$$b(q-q_1)=r_1-r.$$

Так как $q\ne q_1$ то $|q-q_1|\ge 1$. Тогда $b|q-q_1|\ge b$ и значит $|r_1-r|\le b-1$. Но так как $0\le r<b$ и $0\le r_1<b$, то $|r_1-r|\le b-1$, что противоречит ранее установленному условию. Следовательно, $q=q_1$, но тогда и $r=r_1$. А это значит, что представления $a=bq+r$ и $a=bq_1+r_1$ совпадают. Теорема доказана.

Следствие из теоремы. Пусть $m-$ произвольное натуральное число, $m>1$. Каждое целое число при делении на m дает некоторый остаток, причем разных остатков ровно m. Это могут быть числа $0, 1, 2, \ldots, m-1$.

Пример 22. (МФТИ, 2002). *Дано число* $a=2^{2002}+3^{2002}$. *Найти последнюю цифру числа a и остаток от деления числа a на* 11.

Решение. Найдем последнюю цифру числа a. Последние цифры чисел 2^k повторяются через четыре шага ($2^1=2$, $2^2=4$, $2^3=8$, $2^4=6$, $2^5=32$, $2^6=64$ и т.д.). Поэтому последняя цифра числа 2^{2002} такая же, как и у числа 2^2, так как $2002=4\cdot 500+2$, т.е. 4.

Аналогично, последняя цифра у числа 3^{2002} такая же, как и у числа 3^2, т.е. 9.

Следовательно, последняя цифра числа a такая же, как у и суммы $4+9=13$, т.е. 3.

Найдем остаток от деления числа a на 11. Заметим, что остатки от деления на 11 чисел вида 2^k повторяются через 10 шагов. Поэтому остаток от деления числа 2^{2002} на 11 равен остатку от деления на 11 числа 2^2, так как $2002 = 10 \cdot 200 + 2$, т.е. 4.

Аналогично, остатки от деления на 11 чисел вида 3^k повторяются через 5 шагов. Поэтому остаток от деления числа 3^{2002} на 11 равен остатку от деления на 11 числа 3^2, так как $2002 = 5 \cdot 400 + 2$, т.е. равен 9.

Следовательно, остаток от деления числа a на 11 равен остатку от деления на 11 суммы $4+9=13$, т.е равен 2.

***Ответ*:** 3 и 2.

Алгоритм Евклида

Для нахождения НОД двух чисел делят большее число на меньшее, и если получается ненулевой остаток, то делят меньшее число на остаток; если снова получается ненулевой остаток, то делят первый остаток на второй. Так продолжают делить до тех пор, пока в остатке не получится нуль. Последний делитель и есть НОД данных чисел:

$$\begin{aligned}
&a = q_1 b + r_1 && (0 \le r_1 < b),\\
&b = r_1 q_2 + r_2 && (0 \le r_2 < r_1),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots && \\
&r_{n-1} = r_n q_{n+1} + r_{n+1} && (0 \le r_{n+1} < r_n),\\
&r_n = r_{n+1} q_{n+2}. &&
\end{aligned} \qquad (6)$$

Число r_{n+1} является НОД чисел a и b.

Замечание. Для доказательства того, что r_{n+1} является НОД чисел a и b, нужно, поднимаясь по равенствам (6) снизу вверх, убедиться, что r_{n+1} является делителем чисел a и b, а затем, взяв любой общий делитель d чисел a и b, опускаясь вниз по равенствам (6) убедиться, что d является делителем r_{n+1}.

Пример 23. *Используя алгоритм Евклида, найти* (5160, 16920).

Решение. Используя алгоритм Евклида, получаем:

$$\begin{aligned}
&16920 = 3 \cdot 5160 + 1440,\\
&5160 = 3 \cdot 1440 + 840,\\
&1440 = 1 \cdot 840 + 600.\\
&840 = 1 \cdot 600 + 240,\\
&600 = 2 \cdot 240 + 120,\\
&240 = 2 \cdot 120.
\end{aligned}$$

Следовательно, $(5160, 16920) = 120$ (см. пример 5).

***Ответ*:** $(5160, 16920) = 120$.

Использование алгоритма Евклида бывает удобнее метода разложения на простые множители в тех случаях, когда трудно получить канонические разложения чисел (или невозможно).

Пример 24. *Известно, что дробь* $\frac{a}{b}$ *несократима* $(a, b \in \mathbf{N})$. *Доказать, что дробь* $\frac{2a+b}{5a+3b}$ *также несократима.*

Решение. Так как дробь $\frac{a}{b}$ несократима, то $(a,b)=1$. Найдем наибольший делитель d чисел $5a+3b$ и $2a+b$. Используя алгоритм Евклида, получаем:

$$\begin{aligned}
&5a+3b = 2\cdot(2a+b) + a + b,\\
&2a+b = 1\cdot(a+b) + a,\\
&a+b = 1\cdot a + b.
\end{aligned}$$

Отсюда получаем, что

$$d = (5a+3b, 2a+b) = (2a+b, a+b) = (a+b, a).$$

Далее по алгоритму Евклида задача сводится к нахождению наибольшего делителя чисел a и b, но по условию $(a,b)=1$. Отсюда следует, что $d=(a,b)=1$. В таком случае дробь $\frac{2a+b}{5a+3b}$ несократима.

Пример 25. *Найти все натуральные n, при которых дробь* $\frac{3n^3-8n^2+14n-8}{3n-5}$ *сократима.*

Решение. Найдем наибольший делитель d чисел $3n^3-8n^2+14n-8$ и $3n-5$. Для этого воспользуемся алгоритмом Евклида. Так как

$3n^3-8n^2+14n-8=(n^2-n+3)(3n-5)+7$,

то

$$d=(3n^3-8n^2+14n-8,3n-5)=$$
$$=(3n-5,7).$$

Так как 7 – простое число, то возможны два значения d. Если $d=1$, то исходная дробь несократима. Если $d=7$, то число $3n-5$ должно быть кратно 7, т.е. с учетом того, что $n\in\mathbf{N}$, $3n=7k+5$, где $k\in\mathbf{N}$. Отсюда

$$n=\frac{7k+5}{3}=2k+1+\frac{k+2}{3}.$$

В последнем равенстве дробь будет целым числом, если $k=3m+1$, где $m=0,1,2,\ldots$, тогда $n=7m+4$.

***Ответ*:** При $n=7m+4$, где $m=0,1,2,\ldots$.

Пример 26. *Найти наибольший общий делитель d чисел 27 и 96* и *представить его в виде $d=27x+96y$, где x и y – целые числа.*

Решение. Используя алгоритм Евклида, найдем наибольший делитель d чисел 27 и 96:

$$96=3\cdot27+15,$$
$$27=1\cdot15+12,$$
$$15=1\cdot12+3,$$
$$12=4\cdot3.$$

Отсюда получаем, что $d=(27,96)=3$. Начиная с первого равенства алгоритма Евклида, спускаясь до предпоследнего, получаем:

$15=96-3\cdot27$,

$12=27-1\cdot15=27-1\cdot(96-3\cdot27)=$
$=4\cdot27-1\cdot96,$

$3=15-1\cdot12=(96-3\cdot27)-1\cdot(4\cdot27-1\cdot96)=$
$=-7\cdot27+2\cdot96$.

Это и есть искомое представление

$$3=-7\cdot27+2\cdot96 \text{ т.е. } x=-27,\ y=2.$$

***Ответ*:** $d=(27,96)=3$, $3=7\cdot x+96\cdot y$, где $x=-27$, $y=2$.

Замечание. Отметим, что найденное представление не является единственным.

Пример 27. (МИОО, 2010). *Найти несократимую дробь*

$$\frac{p}{q}=\frac{1234567\overbrace{888\ldots8}^{2000\text{ раз}}7654321}{12345678\underbrace{999\ldots9}_{1999\text{ раз}}87654321}.$$

Решение. Рассмотрим число $a=\underbrace{11\ldots1}_{2007\text{ раз}}$.

Заметим, что числитель дроби равен

$$1234567\overbrace{888\ldots8}^{2000\text{ раз}}7654321=a\cdot10^7+a\cdot10^6+$$
$$+a\cdot10^5+a\cdot10^4+a\cdot10^3+a\cdot10^2+a\cdot10+a=$$
$$=a\cdot11111111.$$

Аналогично этому, знаменатель дроби равен $a\cdot111111111$.

Числа 111 111 111 и 11 111 111 взаимно просты. Убедиться в этом можно используя алгоритм Евклида. Следовательно,

$$\frac{p}{q}=\frac{a\cdot11111111}{a\cdot111111111}=\frac{11111111}{111111111}.$$

***Ответ*:** $\frac{11111111}{111111111}$.

Классы чисел $\{2k\}$, $\{2k+1\}$: четные и нечетные числа

● Целое число, делящееся на 2, называют *четным*, а целое число, не делящееся на 2, называют *нечетным*. Четное число a можно представить в виде $n=2k$, а нечетное число n – в виде $n=2k+1$, где k – некоторое целое число.

Два целых числа называются *числами одинаковой четности*, если оба они четные или нечетные. Два целых числа называются *числами разной четности*, если одно из них четное, а другое нечетное.

● Свойства четных и нечетных чисел:

1. Сумма четного и нечетного чисел – число нечетное.

2. Сумма любого количества четных чисел – число четное.

3. Сумма любого количества нечетных чисел – число четное, если количество слагаемых четно, и нечетное, если количество слагаемых нечетно.

4. Произведение нескольких целых чисел четно, если хотя бы один из множителей четен.

5. Произведение нескольких целых чисел нечетно, если все множители нечетны.

6. Сумма и разность любых двух целых чисел имеют одинаковую четность.

Пример 28. *Какое наибольшее количество натуральных чисел можно записать в строку так, чтобы сумма любых трех соседних чисел была четной, а сумма любых четырех соседних чисел была нечетной?*

Решение. Пусть $a_1, a_2, a_3, ... -$ записанные в строку натуральные числа.

По условию для любого элемента a_i $(i > 1)$ строки выполняется условие: сумма $a_{i-1} + a_i + a_{i+1} -$ четна.

Вычитая из каждой такой суммы, начиная со второй, предыдущую сумму, получим, что разности $a_{i+2} - a_{i-1} -$ нечетны. Это значит, что пары чисел a_{i+2} и a_{i-1} одновременно четны или нечетны.

По условию для любого элемента a_i $(i > 2)$ строки выполняется условие: суммы $a_{i-1} + a_i + a_{i+1} + a_{i+2}$ и $a_{i-2} + a_{i-1} + a_i + a_{i+1} -$ нечетны.

Запишем по порядку, начиная с первой, такие суммы:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = (a_1 + a_2 + a_3) + a_4,$$
$$a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = (a_2 + a_3 + a_4) + a_5,$$
$$a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = (a_3 + a_4 + a_5) + a_6,$$

и т.д.

С учетом того, что суммы стоящие в скобках – четны, получаем, что все числа $a_4, a_5, a_6, ... -$ нечетны.

Но тогда любая сумма $a_i + a_{i+1} + a_{i+2}$ при $i \geq 4$ – нечетна, а это противоречит условию. Следовательно, уже для 6 чисел условие задачи не выполняется.

Проверим выполнимость условия для пяти чисел. Так как числа a_4, a_5 согласно установленному выше нечетны, то число a_3 четно. Соответственно, из четности сумм $a_2 + a_3 + a_4$ и $a_1 + a_2 + a_3$ получаем, что a_2 нечетно и a_1 четно.

Рассматривая суммы $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ и $a_2 + a_3 + a_4 + a_5$, убеждаемся, что они нечетны. Следовательно, все условия задачи выполнены.

***Ответ*:** 5.

Пример 29. *Доказать, что квадрат четного числа делится на* 4, *а квадрат нечетного числа имеет вид* $4p + 1$, *где* $p \in \mathbf{N}$.

Решение. 1. Пусть $n -$ четное число, тогда $n = 2k$, откуда находим $n^2 = 2k \cdot 2k = 4k^2$, где $k^2 -$ натуральное число. Следовательно, n^2 делится на 4.

2. Пусть $n -$ нечетное число, тогда $n = 2k + 1$, откуда следует, что

$$n^2 = (2k+1)(2k+1) = 4(k^2 + k) + 1,$$

где $k^2 + k = p -$ целое число, т.е. $n^2 = 4p + 1$.

Пример 30. (МИОО, 2010). *Перед каждым из чисел* 2, 3, …, 6 *и* 10, 11, …, 20 *произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего к каждому из образовавшихся чисел первого набора прибавляют каждое из образовавшихся чисел второго набора, а затем все* 55 *полученных результатов складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?*

Решение. 1. Если все числа взяты со знаком плюс, то их сумма максимальна и равна

$$S_{\text{наиб}} = 11(2+3+4+5+6) + 5 \cdot \left(\frac{10+20}{2} \cdot 11 \right) =$$
$$= 220 + 5 \cdot 15 \cdot 11 = 1045.$$

2. Так как предыдущая сумма оказалась нечетной, то число нечетных слагаемых в ней – нечетно, причем это свойство всей суммы не меняется при смене знака любого ее слагаемого. Поэтому любая из получающихся сумм будет нечетной, а значит, не будет равна 0.

3. Значение 1 модуль суммы принимает, например, при следующей расстановке знаков у чисел:

$$11(-2+3-4+5-6) + 5(10+11-12-13+$$
$$+14+15-16-17+18+19-20) =$$
$$= -44 + 45 = 1.$$

***Ответ*:** 1045 и 1.

Классы чисел $\{3k\}$, $\{3k+1\}$, $\{3k+2\}$

Пример 31. *Пусть* p *– простое число. Доказать, что* $8p^2+1$ *– простое число лишь при* $p=3$.

Решение. Если $p=3$, то имеем $8\cdot 3^2+1=73$ – простое число. Остальные числа вида $p=3k$ не являются простыми, где $k\in\mathbf{N}$.

Пусть $p=3k+1$, тогда получаем

$$8\cdot(3k+1)^2+1=72k^2+48k+9=$$
$$=3(24k^2+16k+3) \text{ – составное число.}$$

Аналогично при $p=3k+2$ получаем составное число (покажите самостоятельно).

Другие классы чисел

Пример 32. *Доказать, что сумма квадратов пяти последовательных целых чисел не является полным квадратом.*

Решение. Из примера 29 следует, что остаток от деления на 4 квадрата целого числа равен 0, если число четное, и 1, если – нечетное.

Среди любых пяти идущих подряд целых чисел $k, k+1, k+2, k+3, k+4$ два или три нечетные числа. Соответственно, среди чисел

$$k^2, (k+1)^2, (k+2)^2, (k+3)^2, (k+4)^2$$

также два или три – нечетные.

Предположим, что найдется такое целое число m, что

$$k^2+(k+1)^2+(k+2)^2+$$
$$+(k+3)^2+(k+4)^2=m^2.$$

Но тогда при делении на 4 левая часть последнего равенства даст остаток 2 или 3, а правая – 0 или 1. В таком случае равенство невозможно, так как равные числа должны давать одинаковые остатки при делении на одно и тоже число. Получили противоречие. Следовательно, сумма чисел

$$k^2, (k+1)^2, (k+2)^2, (k+3)^2, (k+4)^2$$

не может быть полным квадратом.

2. Десятичная запись натурального числа

• Любое натуральное число n можно представить в десятичной системе счисления в виде:

$$n=\overline{a_k a_{k-1}\ldots a_2 a_1 a_0}=$$
$$=a_k\cdot 10^k+a_{k-1}\cdot 10^{k-1}+\ldots+a_2\cdot 10^2+a_1\cdot 10+a_0.$$

Например,

$$2485=2\cdot 1000+4\cdot 100+8\cdot 10+5=$$
$$=2\cdot 10^3+4\cdot 10^2+8\cdot 10+5;$$

двузначное число: $\overline{ab}=10a+b$;

трехзначное число: $\overline{abc}=100a+10b+c$.

Признаки делимости натуральных чисел

1) Число n делится на 2 тогда и только тогда, когда a_0 делится на 2.
2) Число n делится на 4 тогда и только тогда, когда $\overline{a_1 a_0}$ делится на 4.
3) Число n делится на 8 тогда и только тогда, когда $\overline{a_2 a_1 a_0}$ делится на 8.
4) Число n делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма всех его цифр делится на 3.
5) Число n делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма всех его цифр делится на 9.
6) Число n делится на 5 тогда и только тогда, когда a_0 делится на 5.
7) Число n делится на 25 тогда и только тогда, когда $\overline{a_1 a_0}$ делится на 25.
8) Число n делится на 125 тогда и только тогда, когда $\overline{a_2 a_1 a_0}$ делится на 125.
9) Число делится на 10 тогда и только тогда, когда его последняя цифра 0.
10) Число делится на 11 тогда и только тогда, когда делится на 11 сумма

$$a_0-a_1+a_2-\ldots+(-1)^k a_k.$$

Пример 33. (ММР, 11 класс, 2000/2001 учебный год). *При каких натуральных* n *число* $A=1313\ldots13$ (*всего* $2n$ *цифр*) *делится на* 63?

Решение. Число делится на 63 тогда и только тогда, когда оно делится на 7 и на

9. Так как сумма цифр числа A равна $(1+3)n = 4n$ и $НОД(4;9) = 1$, то A кратно 9 тогда и только тогда, когда n кратно 9. Число 131313 делится на 7, поэтому $n = 9k,\ k \in \mathbf{N}$.

Ответ: $9k,\ k \in \mathbf{N}$.

Пример 34. *Пятизначное число делится на* 72, *причем три его цифры – единицы. Найти все такие числа.*

Решение. Искомое число не может оканчиваться на 1, поэтому пусть число оканчивается на цифру $b \neq 1$. Другую неизвестную цифру, которую можно поставить на первое, второе, третье или четвертое место, обозначим через a.

Число 72 делится на два взаимно простых числа 8 и 9.

Исходя из признака делимости на 9, получим, что выражение $3 + a + b$ кратно 9 и два возможных равенства $a + b = 6$ (*) или $a + b = 15$ (**).

1. Пусть цифра a стоит на первом месте, тогда число имеет вид $\overline{a111b}$. Из признака делимости на 8 число $\overline{11b}$ делится на 8. Значит, $b = 2$. Из равенств (*) и (**) соответственно получаем $a = 4$ или $a = 13$ (не подходит).

2. Цифра a стоит на втором месте. Рассуждения первого пункта повторяются, поэтому $b = 2$, $a = 4$.

3. Цифра a стоит на третьем месте. Тогда последние три цифры образуют число $\overline{a1b}$, которое делится на 8. Представим трехзначное число $\overline{a1b}$ в виде, содержащем слагаемое, кратное 8, и слагаемое $a + b$:

$$\overline{a1b} = 100a + 10 + b =$$
$$= (8 \cdot 12a + 4a) + (8 + 2) + b =$$
$$= (8 \cdot 12a + 8) + (a + b) + (3a + 2).$$

Для равенства $a + b = 6$ имеем выражение $6 + (3a + 2) = 8 + 3a$, кратное 8 при $a = 0$ или $a = 8$. Отсюда $b = 6$ или $b = -2$ (не подходит).

Для равенства $a + b = 15$ имеем выражение $15 + (3a + 2) = 16 + (3a + 1)$, кратное 8 при $a = 5$. Отсюда $b = 10$ (не подходит).

4. Цифра a стоит на четвертом месте. Представим трехзначное число $\overline{1ab}$ в виде,

$$\overline{1ab} = 100 + 10a + b =$$
$$= (8 \cdot 12 + 4) + (8a + 2a) + b =$$
$$= (8 \cdot 12 + 8a) + (a + b) + (a + 4).$$

Для равенства $a + b = 6$ имеем выражение $6 + (a + 4) = 8 + (a + 2)$, кратное 8 при $a = 6$. Отсюда $b = 0$.

Для равенства $a + b = 15$ имеем выражение $15 + (a + 4) = 16 + (a + 3)$, кратное 8 при $a = 5$. Отсюда $b = 10$ (не подходит).

Ответ: 41112, 14112, 11016, 11160.

Пример 35. (**МИОО, 2010**). *Найдутся ли хотя бы три десятичных числа, делящиеся на* 11, *в записи каждого из которых использованы все цифры от* 0 *до* 9?

Решение. Число делится на 11 тогда и только тогда, когда разность между суммами его цифр, стоящих на четных и нечетных местах, делится на 11.

Выпишем все цифры подряд в порядке убывания 9876543210, тогда указанная разность сумм равна

$$9 + 7 + 5 + 3 + 1 - (8 + 6 + 4 + 2 + 0) = 25 - 20 = 5.$$

Поменяем местами цифры 3 и 6, тогда первая сумма увеличится на 3, вторая сумма уменьшится на 3, а разность станет равной $28 - 17 = 11$.

Ответ: да.

Восстановление цифр

Пример 36. *Восстановить запись:*

СИ·СИ = СОЛЬ,

если одинаковые буквы означают одинаковые цифры, разные буквы – разные цифры.

Решение. Само число и его квадрат начинаются с одной и той же буквы. Это может быть при $C = 1$ или $C = 9$. Первый вариант не подходит, так как получим квадрат числа СИ в виде трехзначного числа.

Пусть $C = 9$. Чтобы квадрат начинался с цифры 9, необходимо проверить числа 95, 96, 97, 98, так как $94^2 = 8836$, $95^2 = 9025$. Числа 95 и 96 не подходят, так как оканчиваются на цифру 5 или 6 соответственно, но буквы И и Ь обозначают разные цифры. Квадрат числа 97 оканчивается на цифру 9, что противоречит условию задачи. Подходит число 98, его квадрат 9604.

***Ответ*:** $98 \cdot 98 = 9604$.

Зачеркивание цифр

Пример 37. *Найти все натуральные числа, которые при зачеркивании последней цифры уменьшаются в* 14 *раз.*

Решение. Пусть искомое число имеет вид $10a + b$, где a – количество десятков, b – последняя цифра. Тогда из условия задачи получаем $10a + b = 14a$. Отсюда $b = 4a$. Так как b является цифрой, то $a = 1$ или $a = 2$. Соответственно получаем значения $b = 4$ или $b = 8$, и искомые числа 14 или 28.

***Ответ*:** 14; 28.

Пример 38. *Шестизначное число A делится на* 17*, а число, полученное вычеркиванием его последней цифры, делится на* 13. *Найти наибольшее число A, удовлетворяющее этим требованиям.*

Решение. Пусть a – последняя цифра числа A, а B – число, полученное из A вычеркиванием последней цифры. Тогда $A = 10B + a$. Число B – пятизначное. Так как $99\,999 = 13 \cdot 7692 + 3$, то число $99\,996$ делится на 13. Числа A вида $\overline{999\,96a}$ не делятся на 17, так как наибольшее из них $999\,969$ при делении на 17 дает в остатке 12, а наименьшее $999\,960$ – дает в остатке 3. Значит $B = 99\,996$ не подходит.

Тогда возьмем $B = 99\,996 - 13 = 99\,983$. Если взять число A вида $\overline{999\,83a}$, то $999\,839 = 17 \cdot 58\,814 + 1$. Следовательно, подходит $999\,838$. Ясно, что оно наибольшее.

Ответ. $999\,838$.

Пример 39. *Найти хотя бы одно натуральное число, которое при зачеркивании первой цифры уменьшается в* 57 *раз.*

Решение. Из условия имеем

$$10^k \cdot a + x = 57x \text{ или } 10^k \cdot a = 56x,$$

где a – зачеркиваемая цифра, x – число, образованное k его последними цифрами.

Так как правая часть последнего равенства делится на 7, то $a = 7$. Тогда получаем $10^k = 8x$. Число 10^k делится на 8 при $k = 3$. Наименьшее искомое число 7125. Остальные числа имеют вид 71250, 712500, … .

Ответ. $7125\underbrace{0...0}_{n \text{ раз}}$, $n \in \{0\} \cup \mathbf{N}$.

Приписывание цифр

Пример 40. (**МИОО 2010**). *Найти все пары пятизначных чисел x и y, такие что число $\overline{xy}$, полученное приписыванием десятичной записи числа y после десятичной записи числа x, делится на xy.*

Решение. Из условия задачи имеем $\overline{xy} = 10^5 x + y = sxy$, где s – натуральное число. Отсюда получаем $10^5 x = (sx - 1)y$ (∗). Так как $sx - 1$ не делится на x, то y делится на x. Значит, $y = tx$, где t – натуральное число, причем $t < 10$ (иначе y будет шестизначным числом). Равенство (∗) примет вид $10^5 x = (sx - 1)tx$ или $10^5 = (sx - 1)t$. Из последнего равенства 10^5 делится на t. Рассмотрим возможные делители числа 10^5, меньшие 10.

1. Пусть $t = 1$, тогда $sx = 100001$. Первые делители числа 100001: 1и 11. Но при $s = 1$ или $s \geq 11$ число x не пятизначное.

2. Если $t = 2$, то $sx = 50001$. Первые делители числа 50001: 1, 3 и 7.

При $s = 1$ получаем $x = 50001$, $y = 2 \cdot 50001 = 100002$ (противоречие с условием).

При $s = 3$ получаем $x = 16667$, $y = 2 \cdot 16667 = 33334$.

При $s \geq 7$ число x не является пятизначным.

3. Если $t = 4$, то $sx = 25001$. Первые делители числа 25001: 1 и 23.

При $s = 1$ получаем $x = 25001$, $y = 4 \cdot 50001 = 100004$ (противоречие с условием).

При $s \geq 23$ число x не является пятизначным.

4. Если $t=5$, то $sx=20001$. Первые делители числа 20001: 1 и 3.

При $s=1$ получаем $x=20001$, $y=5\cdot 20001=100005$ (противоречие с условием).

При $s\ge 3$ число x не является пятизначным.

5. Если $t=8$, то $sx=12501$. Первые делители числа 12501: 1 и 3.

При $s=1$ получаем $x=12501$, $y=8\cdot 12501=100008$ (противоречие с условием).

При $s\ge 3$ число x не является пятизначным.

Ответ: $x=16667$, $y=33334$.

Пример 41. *Даны два двузначных числа. Если большее число написать впереди меньшего и полученное четырехзначное число разделить на меньшее, то в частном получится* 247, *а в остатке* 10. *Если же меньшее число написать впереди большего и разделить полученное число на большее, то в частном получится* 41, *а в остатке* 20. *Найти сумму данных двузначных чисел.*

Решение. Пусть меньшее число – $\overline{xy}$, большее – $\overline{zt}$. Написав большее впереди меньшего получим

$$\overline{ztxy}=1000z+100t+10x+y.$$

Запишем тот факт, что при делении полученного числа на меньшее в частном получится 247, а в остатке 10:

$$1000z+100t+10x+y=247(10x+y)+10.$$

Аналогично во втором случае:

$$1000z+100t+10x+y=41(10z+t)+20.$$

Обозначив $s=\overline{zt}=10z+t$, $u=\overline{xy}=$ $=10x+y$, получим систему уравнений

$$\begin{cases}100s+u=247u+10,\\100u+s=41s+20.\end{cases}$$

Отсюда получаем $s=37, u=15$.

Ответ. 37 и 15.

Перестановки цифр

Пример 42. *Шестизначное число оканчивается цифрой* 7. *Если эту цифру перенеси в начало числа, то оно увеличится в пять раз. Что это за число*?

Решение. Пусть искомое число $10a+7$, где a – количество десятков. Тогда из условия задачи получаем

$$(10a+7)\cdot 5=7\cdot 10^5+a.$$

Отсюда $a=14285$, значит, $10a+7=142857$.

Ответ: 142857.

Обращенные числа

Пример 43. *Произведение натурального числа и числа, записанного теми же цифрами в обратном порядке, равно* 2430. *Найти такие числа.*

Решение. Искомое число не может быть однозначным. Для трехзначного числа произведение превосходит 10000. Значит, искомое число двузначное. Пусть $\overline{xy}$ – искомое число, тогда $\overline{xy}\cdot\overline{yx}=2430$. Так как число 2430 делится на 10, то одна из цифр искомого числа 5, а другая четная. Поэтому из возможных чисел 52, 54, 56 и 58 перебором находим, что $54\cdot 45=2430$.

Ответ: 54; 45.

Пример 44. (МИОО, 2009. B12). *Найдите двузначное число, если оно в 2 раза больше произведения его цифр. Если переставить цифры этого числа в обратном порядке, то отношение полученного числа и данного будет равно* $\frac{7}{4}$.

Решение. Пусть $x-$ количество десятков, а $y-$ количество единиц данного числа $\overline{xy}$. Первое условие запишется следующим образом

$$10x+y=2xy \quad (*)$$

Тогда второе условие запишется следующим образом

$$\frac{10y+x}{10x+y}=\frac{7}{4} \quad (**)$$

Из уравнения (**) получаем

$$40y + 4x = 70x + 7y \text{ или } 33y = 66x,$$

т.е. $y = 2x$.

Подставляя полученное выражение в уравнение (*)получаем $12x = 4x^2$. Так как данное число – двузначное, то $x \neq 0$. Следовательно, $x = 3$. Тогда $y = 6$ и 36 – искомое число.

Ответ: 36.

Последние цифры

Пример 45. *Доказать, что при любом натуральном* $n \geq 2$ *числа вида* $2^{2^n} + 1$ *оканчиваются цифрой* 7.

Решение. При $n = 2$ имеем число $2^{2^2} + 1 = 17$, которое оканчивается цифрой 7. Допустим, что утверждение задачи выполняется при $n = k$, то есть $2^{2^k} + 1 = 10p + 7$, где p – натуральное число. Тогда

$$2^{2^{k+1}} + 1 = (2^{2^k})^2 + 1 = (10p + 6)^2 + 1 =$$
$$= 100p^2 + 120p + 37 = 10q + 7,$$

где q – натуральное число.

В силу принципа математической индукции утверждение задачи верно для любого натурального числа $n \geq 2$.

3. Сравнения

Найденные результаты в предыдущих пунктах можно легко получить, используя приведенные ниже понятие и свойства сравнения чисел по модулю.

Если числа a и b при делении на натуральное число m дают равные остатки, то говорят, что эти числа *сравнимы по модулю* m, и пишут

$$a \equiv b \pmod{m}$$

Иначе говоря, запись $a \equiv b \pmod{m}$ означает, что разность чисел $a - b$ делится на m. Например, $7 \equiv 27 \pmod{5}$, $40 \equiv 14 \pmod{13}$, $10 \equiv -4 \pmod{7}$.

Сравнения были введены в XIX в. немецким математиком К. Гауссом. Они обладают многими из тех свойств, которые справедливы для равенств.

Перечислим ***основные свойства сравнений***.

1. Если $a \equiv b \pmod{m}$ и $b \equiv c \pmod{m}$, то $a \equiv c \pmod{m}$.

2. Если $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m}$, то

$$a + c \equiv b + d \pmod{m},$$
$$a - c \equiv b - d \pmod{m},$$
$$a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{m},$$
$$a^k \equiv b^k \pmod{m}, \text{ где } k \in \mathbf{N},$$

т.е. сравнения можно складывать, вычитать и перемножать, как и верные равенства. В частности, можно обе части сравнения умножать на одно и то же число.

3. Если $a + b \equiv c \pmod{m}$, то

$$a \equiv c - b \pmod{m}.$$

4. Если $ak \equiv bk \pmod{m}$ а числа k и m взаимно просты, то $a \equiv b \pmod{m}$, т.е. обе части сравнения можно сокращать на общий множитель, если этот множитель и модуль m – взаимно простые числа.

5. Если $a \equiv b \pmod{m}$ и d – делитель числа m, то $a \equiv b \pmod{d}$.

Ограничимся доказательством свойств 4 и 5.

Доказательство. 4. По условию число $ak - bk = k(a - b)$ делится на m. Так как k не делится на m (k и m взаимно простые числа и $m \neq 1$), то число $a - b$ делится на m, т.е. $a \equiv b \pmod{m}$.

5. Так как $a \equiv b \pmod{m}$ то число $a - b$ должно делиться на m, а значит и на любой делитель d числа m, т.е. $a \equiv b \pmod{d}$.

Задачи на деление чисел без остатка

Пример 46. *Доказать, что число* $a = 96^{19} + 32^{13} - 8 \cdot 73^{16}$ *делится на* 10.

Решение. Пользуясь, тем, что $96 \equiv 6 \pmod{10}$ и учитывая то, что при возведении числа 6 в любую степень $k \in \mathbf{N}$ получается число, оканчивающееся цифрой 6, имеем по свойству сравнений $96^{19} \equiv 6^{19} \equiv 6 \pmod{10}$.

Так как

$$32^{13} \equiv 2^{13} \equiv 2 \cdot (2^6)^2 \equiv 2 \cdot 4^2 \equiv$$
$$\equiv 2 \cdot 6 \equiv 2 \pmod{10},$$

$$8\cdot 73^{16}\equiv 8\cdot 3^{16}\equiv 8\cdot (3^2)^8\equiv 8\cdot (-1)^8\equiv$$
$$\equiv 8\cdot 1\equiv 8\ (\mathrm{mod}\ 10),$$

то $a\equiv 6+2-8\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 10)$, т.е. число a делится на 10.

Задачи на деление чисел с остатком

Пример 47. *Найти остаток от деления числа a на m, если*:

1) $a=26^{36}$, $m=7$; 2) $a=2011^{2012}$, $m=13$.

Решение. 1) Так как $26\equiv 5\ (\mathrm{mod}\ 7)$, то по свойству сравнений $26^{36}\equiv 5^{36}\ (\mathrm{mod}\ 7)$. Учитывая то, что

$$5^{36}=(5^2)^{18}=25^{18},\ \text{а}\ 25\equiv 4\ (\mathrm{mod}\ 7),$$

получаем

$$5^{36}\equiv 4^{18}\ (\mathrm{mod}\ 7).$$

Заметим теперь, что

$$4^{18}=(4^3)^6=64^6,$$

а

$$64\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 7)\ \text{и}\ 4^{18}\equiv 1^6\ (\mathrm{mod}\ 7).$$

Так как $1^6\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 7)$, то получаем, что остаток равен 1. Проведенные рассуждения можно представить в виде цепочки сравнений

$$26^{36}\equiv 5^{36}\equiv 25^{18}\equiv 4^{18}\equiv 64^6\equiv 1^6\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 7).$$

2) Запишем цепочку сравнений

$$2011^{2012}\equiv 9^{2012}\equiv 81^{1006}\equiv 3^{1006}\equiv 27^{335}\cdot 3\equiv$$
$$\equiv 1^{335}\cdot 3\equiv 1\cdot 3\equiv 3\ (\mathrm{mod}\ 13).$$

Следовательно, остаток от деления числа 2011^{2012} на 13 равен 3.

Ответ: 1) 1; 2) 3.

Пример 48. *Доказать, что если целое число a не делится на 5, то число a^4-1 делится на 5.*

Решение. Пусть $r-$ остаток от деления a на 5, тогда $a=5k+r$, где $k\in \mathbf{N}$, $r-$ одно из чисел 1, 2, 3, 4, так как a не делится на 5. По свойству сравнений, если $a\equiv r\ (\mathrm{mod}\ 5)$, то $a^4\equiv r^4\ (\mathrm{mod}\ 5)$. Учитывая, что $1^4\equiv 2^4\equiv 3^4\equiv 4^4\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 5)$, т.е. $r^4\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 5)$ при $r=1,2,3,4$, получаем $a^4\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 5)$.

Это означает, что число a^4-1 делится на 5. Утверждение доказано.

Пусть $k\in \mathbf{N}$. Рассмотрим числа вида k^2 и выясним, какие остатки могут давать эти числа при делении на натуральное число m ($3\le m\le 9$).

$$k^2\equiv 0\ \text{или}\ 1\ (\mathrm{mod}\ 3),$$
$$k^2\equiv 0\ \text{или}\ 1\ (\mathrm{mod}\ 4),$$
$$k^2\equiv 0\ \text{или}\ 1\ \text{или}\ 4\ (\mathrm{mod}\ 5),$$
$$k^2\equiv 0\ \text{или}\ 1\ \text{или}\ 3\ \text{или}\ 4\ (\mathrm{mod}\ 6),$$
$$k^2\equiv 0\ \text{или}\ 1\ \text{или}\ 2\ \text{или}\ 4\ (\mathrm{mod}\ 7),$$
$$k^2\equiv 0\ \text{или}\ 1\ \text{или}\ 4\ (\mathrm{mod}\ 8),$$
$$k^2\equiv 0\ \text{или}\ 1\ \text{или}\ 4\ \text{или}\ 7\ (\mathrm{mod}\ 9).$$

Аналогично можно получить следующие утверждения.

● Квадрат любого натурального числа или делится на 2 (на 4), когда само число чётное, или при делении на 2 (на 4) даёт в остатке 1.

● Квадрат любого натурального числа или делится на 3, когда на 3 делится само число, или при делении на 3 даёт в остатке 1.

● Квадрат любого натурального числа или делится на 5, когда на 5 делится само число, или при делении на 5 даёт в остатке 1 или 4.

● Квадрат любого натурального числа или делится на 7, когда на 7 делится само число, или при делении на 7 даёт в остатке 1, 2 или 4.

● Разность квадратов двух целых чисел одинаковой чётности делится на 4.

● При делении на 3 куб целого числа и само число дают одинаковые остатки (0, 1, 2).

● При делении на 9 куб целого числа дает в остатке 0, 1, 8.

● При делении на 4 куб целого числа дает в остатке 0, 1, 3.

Вывод признаков делимости

Пример 49. *Доказать признак делимости на* 11: *натуральное число a, записанное в виде*

$$a_n\cdot 10^n+a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+\ldots+a_2\cdot 10^2+a_1\cdot 10+a_0$$

делится на 11 *тогда и только тогда, когда делится на* 11 *сумма*

$$a_0-a_1+a_2-\ldots+(-1)^n a_n.$$

Доказательство. Пусть натуральное число a имеет вид $\overline{a_n a_{n-1}\ldots a_2 a_1 a_0}$.

Так как $10\equiv -1\pmod{11}$, то $10^2\equiv 10^4\equiv$ $\equiv\ldots\equiv 10^{2k}\equiv 1\pmod{11}$ при любом $k\in\mathbf{N}$; $10\equiv 10^3\equiv\ldots\equiv 10^{2k+1}\equiv -1\pmod{11}$ при любом $k\in\mathbf{N}$.

По свойству сравнений получаем

$$10^n\cdot a_n+10^{n-1}\cdot a_{n-1}+\ldots+10^2\cdot a_2+10\cdot a_1+ \\ +a_0\equiv a_0-a_1+a_2-\ldots+(-1)^n\cdot a_n,$$

т.е. число a делится на 11 тогда и только тогда, когда на 11 делится сумма его цифр, взятая с чередующимися знаками.

Утверждение доказано.

Общий признак делимости чисел

Для того чтобы число M делилось на d, необходимо и достаточно, чтобы сумма произведений цифр этого числа на остатки, получаемые от деления на d соответствующих степеней числа 10, делились на d.

Действительно, пусть

$$a=10^n\cdot a_n+\ldots+10^2\cdot a_2+10\cdot a_1+a_0$$

и

$$10^n=dq_n+r_n,\ \ldots,\ 10^2=dq_2+r_2, \\ 10=dq_1+r_1.$$

Тогда M делится на d в том и только том случае, если на d делится сумма

$$\boxed{M=a_n r_n+a_{n-1}r_{n-1}+\ldots+a_1 r_1+a_0.}$$

Малая теорема Ферма

1. При любом целом a разность a^2-a делится на 2.

Доказательство. Так как $a^2-a=a(a-1)$, то из двух последовательных чисел только одно четное и делится на 2.

2. При любом целом a разность a^3-a делится на 3.

Доказательство. Так как $a^3-a=a(a-1)(a+1)$, то из трех последовательных чисел только одно делится на 3.

3. Теорема 9 (*малая теорема Ферма*). Если $p-$ простое число и число a не делится на p, то $a^{p-1}-1$ делится на p (или $a^{p-1}\equiv 1\pmod p$).

Если посмотреть на пример 48, то на основании малой теоремы Ферма сразу можно сделать вывод о том, что если целое число a не делится на 5, то число a^4-1 делится на 5.

Замечание. Теорему Ферма часто записывают в форме, равносильной приведенной выше, $a^p\equiv a\pmod p$. В этой записи предположение о том, что a не делится на p, становится излишним.

Пример 50. *Доказать, что число n^5 оканчивается на ту же цифру, что и число n, где $n\in\mathbf{N}$.*

Доказательство. Так как число 5 является простым числом, то имеем $n^5\equiv n\pmod 5$, то есть n^5 и n имеют одинаковые остатки.

Пример 51. *Показать, что число $13^{176}-1$ делится на* 89.

Решение. По формуле разности квадратов имеем

$$13^{176}-1=(13^{88}-1)(13^{88}+1).$$

Так как 89 – простое число и $(13;89)=1$, то на основании малой теоремы Ферма справедливо сравнение $13^{88}\equiv 1\pmod{89}$, то есть $13^{88}-1$ кратно 89, и следовательно, $13^{176}-1$ кратно 89.

4. Выражения с числами

Дроби

Пример 52. (МИОО, 2010). *Среди обыкновенных дробей с положительными знаменателями, расположенными между числами $\frac{96}{35}$ и $\frac{97}{36}$ найдите такую, знаменатель которой минимален.*

Решение. Приведем дроби к общему знаменателю:

$$\frac{96}{35}=\frac{96\cdot 36}{35\cdot 36}=\frac{3456}{1260};\ \frac{97}{36}=\frac{97\cdot 35}{36\cdot 35}=\frac{3395}{1260}.$$

Будем искать дробь с тем же знаменателем, числитель a которой – натуральное число от 3396 до 3455 – делится на наибольшее возможное произведение, составленное из делителей знаменателя.

Так как $2\cdot 1260<3396$, а $3\cdot 1260>3455$, то сокращение дробей не приводит к знаменателю 1.

Так как $1260=2\cdot 630$ и $5\cdot 630<3396$, а $6\cdot 630>3455$, то сокращение дробей не приводит к знаменателю 2.

Аналогично нельзя привести дроби к знаменателю 3, 4, 5, 6.

Так как $1260=7\cdot 180$ и $3396<180\cdot 19<$ <3456, то дробь $\frac{180\cdot 19}{1260}$ можно сократить на 180, при этом получим наименьший возможный положительный знаменатель 7.

Ответ: $\frac{19}{7}$.

Пример 53. (LXXIX Московская городская олимпиада, 2006 год). *Найти все несократимые дроби* $\frac{a}{b}$, *представимые в виде* $\overline{b,a}$.

Решение. Пусть натуральные числа a и b взаимно просты, а десятичная запись числа a имеет n знаков. Тогда условие задачи для них записывается в виде уравнения

$$a:b=\overline{b,a}\ \Leftrightarrow\ \frac{a}{b}=b+a\cdot 10^{-n}\ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ 10^n\left(a-b^2\right)=ab,$$

из которого следует, в частности, что $a>b$. В силу взаимной простоты чисел a и b, число $a-b^2$ не имеет общих делителей ни с a, ни с b, следовательно, уравнение превращается в систему из двух уравнений

$$\begin{cases}a-b^2=1,\\10^n=ab.\end{cases}$$

В силу все той же взаимной простоты чисел a и b (с учетом неравенства $a>b$), последнему уравнению удовлетворяют только пары чисел $a=10^n$, $b=1$, а также $a=5^n$ и $b=2^n$. Первая пара при подстановке в первое уравнение дает для числа n уравнение $10^n=2$, которое, очевидно, не имеет решений. Вторая пара чисел a и b при подстановке в первое уравнение дает для числа n уравнение

$$5^n-4^n=1\ \Leftrightarrow\ \left(\frac{5}{4}\right)^n=1+\left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

Так как его левая часть представляет собой возрастающую функцию от n, а правая – убывающую, то оно имеет не более одного корня, который угадывается: $n=1$, откуда и находим единственную пару $a=5$ и $b=2$.

Ответ: $\frac{5}{2}$.

Степень числа

При решении задач, связанных со степенью числа, удобно использовать следующие формулы сокращенного умножения

1. Для $n\in\mathbf{N}$, большего единицы:

$$a^n-b^n=(a-b)\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+b^{n-1}\right);$$
$$a^2-b^2=(a-b)(a+b);$$
$$a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right);$$
$$a^4-b^4=(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3).$$

2. Для нечетного натурального n

$$a^n+b^n=(a+b)\left(a^{n-1}-a^{n-2}b+\ldots+b^{n-1}\right);$$
$$a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right).$$

3. Для четного натурального n

$$a^n-b^n=(a+b)\left(a^{n-1}-a^{n-2}b+\ldots-b^{n-1}\right);$$
$$a^2-b^2=(a+b)(a-b);$$
$$a^4-b^4=(a+b)(a^3-a^2b+ab^2-b^3).$$

Для доказательства утверждений достаточно раскрыть скобки и привести подобные слагаемые.

Пример 54. *Доказать, что число*

$$1^{2011}+2^{2011}+3^{2011}+...+30^{2011}$$

делится на 31.

Доказательство. Так как каждая из сумм $1^{2011}+30^{2011}$, $2^{2011}+29^{2011}$, …, $15^{2011}+16^{2011}$ делится на 31, то и вся сумма делится на 31.

Пример 55. (МИОО, 2010). *Найти все натуральные числа, являющиеся степенью двойки, такие, что после зачеркивания первой цифры их десятичной записи снова получается десятичная запись числа, являющегося степенью двойки.*

Решение. Пусть десятичная запись искомого числа $a=2^n$ содержит $k+1$ цифру и первая цифра равна p, а после ее зачеркивания получается десятичная запись числа $b=2^m$. Тогда условию задачи удовлетворяет уравнение

$$2^n=2^m+p\cdot 10^k, (*)$$

где $n, m, k \in \mathbf{N}$, а $p-$ цифра и $1\le k<n$.

Так как последние цифры у чисел a и b одинаковы, то $n=m+4t$, где $t\in\mathbf{N}$ (см. пример 22). Тогда из уравнения (*) получаем

$$2^{m+4t}=2^m+p\cdot 10^k$$

или

$$2^m(2^{4t}-1)=p\cdot 2^k\cdot 5^k,$$

или

$$2^{m-k}(2^{4t}-1)=p\cdot 5^k. (**)$$

Так как $(2, 5)=1$, то либо $2^{m-k}=1$, либо 2^{m-k} является делителем числа p. Рассмотрим несколько случаев.

1. $2^{m-k}=1$. Отсюда $m=k$, но это возможно только при $m=k=1$, так как число, имеющее в десятичной записи k цифр может быть равняться 2^k, если $k=1$. Тогда $2^{4t}-1=5p$, где $5\le 5p\le 45$. Из неравенства $5\le 2^{4t}-1\le 45$ или $6\le 2^{4t}\le 46$ получаем $t=1$. Следовательно, $n=m+4t=1+4=5$. Тогда из равенства $2^4-1=5p$ следует $p=3$. Отсюда получаем $a=2^5=32$.

2. $2^{m-k}\ne 1$. Тогда $p-$ четное число.

а) Если $p=2$, то $2^{m-k}=2$, $m-k=1$. Это возможно при $k=1$ и $m=2$. При этом уравнение $2^{4t}-1=5$ целочисленных решений не имеет.

б) Если $p=4$, то из уравнения (**) получаем $2^{m-k}=4$, т.е. $m-k=2$. Это возможно при $k=1$ и $m=3$, но уравнение $2^{4t}-1=5$ целочисленных решений не имеет.

в) Если $p=6$, то 2^{m-k} является делителем 6. Это возможно, если $m-k=1$ (тогда $k=1$ и $m=2$). Из уравнение $2^{4t}-1=3\cdot 5$ получаем $t=1$ и тогда $a=2^6=64$.

г) Если $p=8$, то из уравнения (**) получаем $2^{m-k}=8$, т.е. $m-k=3$, Это возможно при $k=1$ и $m=4$, но уравнение $2^{4t}-1=5$ целочисленных решений не имеет.

***Ответ*:** 32; 64.

В разделе «Сравнения» приведены утверждения, касающиеся степеней числа. Запишем еще несколько утверждений.

● Число 4^n при делении на 3 дает в остатке 1.

Действительно,

$$4^n=(3+1)^n=3^n+3^{n-1}+...+3+1=3t+1,$$

где $n, t\in\mathbf{N}$.

● Число 5^{2n} при делении на 3 дает в остатке 1, а 5^{2n+1} дает в остатке 2.

Действительно,

$$5^{2n}=25^n=(24+1)^n=24p+1=3t+1,$$
$$5^{2n+1}=5(3p+1)=15p+3+2=3t+1,$$

где $n, p, t\in\mathbf{N}$.

5. Выражения с переменными

Целые рациональные выражения

Пример 56. *Квадратный трехчлен $f(x)=x^2+px+q$ имеет два различных целых корня. Один из корней трехчлена и его значение в точке $x=11$ являются простыми числами. Найти корни трехчлена.*

Решение. Пусть корни трехчлена равны a и b. Тогда $f(x)=(x-a)(x-b)$ и

$f(11) = (11-a)(11-b)$. Если a и $(11-a)(11-b)$ простые числа, то $b = 10$ или $b = 12$.

Пусть $b = 10$, тогда числа a и $11-a$ не могут быть простыми числами (докажите самостоятельно, рассматривая $a = 2$ и a – нечетное).

Пусть $b = 12$, тогда a и $a-11$ могут быть простыми в одном случае при $a = 13$.

Ответ: 12; 13.

Пример 57. (ММО, 1999, 10 класс). *Натуральные числа m и n таковы, что $m^3 + n$ и $m + n^3$ делятся на $m^2 + n^2$. Найти m и n.*

Решение. Докажем вначале, что m и n взаимно просты. Предположим противное. Тогда m и n делятся на некоторое простое число p. Пусть p входит в разложения на простые множители чисел m и n в степенях $a \ge 1$ и $b \ge 1$ соответственно. Не ограничивая общности, можно считать, что $a \ge b$. Тогда максимальная степень p, на которую делится $m^3 + n$, равна b (поскольку m^3 делится на p^{3a} и тем более на p^{b+1}, но n делится на p^b и не делится на p^{b+1}). С другой стороны, $m^2 + n^2$ делится на p^{2a}, следовательно, $m^3 + n$ не может делиться на $m^2 + n^2$. Это противоречие показывает, что m и n взаимно просты.

Далее, по условию

$$m(m^2 + n^2) - (m^3 + n) = n(mn - 1)$$

должно делиться на $m^2 + n^2$. Заметим, что n и $m^2 + n^2$ не могут иметь общий делитель, больший 1 (так как m и n взаимно просты), значит $mn - 1$ делится на $m^2 + n^2$. Но если предположить, что $mn - 1 > 0$, то это невозможно, так как $m^2 + n^2 \ge 2mn > mn - 1$. Итак, $mn = 1$, а значит, $m = n = 1$.

Ответ: $m = n = 1$.

Дробно-рациональные выражения

Пример 58. *Найти все целые n, при которых дробь* $a = \dfrac{n^5 + 3}{n^2 + 1}$ *– целое число.*

Решение. Так как

$$n^5 + 3 = (n^3 - n)(n^2 + 1) + n + 3,$$

то

$$a = \frac{n^5 + 3}{n^2 + 1} = n^3 - n + \frac{n + 3}{n^2 + 1}.$$

Поскольку $n^3 - n$ – целое число, то a – целое число тогда и только тогда, когда $\dfrac{n+3}{n^2+1}$ – целое число. Поиск значений n, для которых дробь $\dfrac{n+3}{n^2+1}$ – целое число, можно упростить, сведя его к перебору значений n, являющихся решениями совокупности

$$\left[\begin{array}{l} |n+3| \ge n^2 + 1, \\ n + 3 = 0, \end{array}\right. \quad \text{т.е. } n \in \{-3, -1, 0, 1, 2\}.$$

Убеждаемся, что при всех этих значениях дробь $\dfrac{n+3}{n^2+1}$ – целое число. Следовательно, при $n \in \{-3, -1, 0, 1, 2\}$, дробь a – целое число.

Ответ: $n \in \{-3, -1, 0, 1, 2\}$.

Пример 59. *Доказать, что дробь* $\dfrac{6n+7}{10n+12}$ *несократима при всех* $n \in \mathbf{N}$.

Решение. Допустим, что дробь $\dfrac{6n+7}{10n+12}$ сократима. Тогда сократима и дробь

$$\frac{10n+12}{6n+7} = \frac{6n+7+4n+5}{6n+7} = 1 + \frac{4n+5}{6n+7}$$

Если сократима дробь $\dfrac{4n+5}{6n+7}$, то сократима и дробь

$$\frac{6n+7}{4n+5} = 1 + \frac{2n+2}{4n+5}.$$

Если сократима дробь $\dfrac{2n+2}{4n+5}$, то сократима и дробь

$$\frac{4n+5}{2n+2} = 2 + \frac{1}{2n+2}.$$

Дробь $\dfrac{1}{2n+2}$ будет сократима в случае, если $2n + 2 = -1$ или $2n + 2 = 1$, что невозможно ни при каком $n \in \mathbf{N}$. Получили противоречие. Значит, исходная дробь несократима.

Иррациональные выражения

Пример 60. (ММР, 11 класс, 2000/2001 учебный год). *При каких целых n значение выражения $\sqrt{n^2 - n + 1}$ является целым числом?*

Решение. Данное выражение принимает целые значения при $n = 0$ и при $n = 1$. Покажем, что при других целых значениях n условие не выполняется. При натуральных $n \geq 2$ выполняются неравенства

$$(n-1)^2 < n^2 - n + 1 < n^2,$$

поэтому число $n^2 - n + 1$ не является квадратом целого числа. Для всех целых отрицательных n выполняются неравенства $(n-1)^2 > n^2 - n + 1 > n^2$, поэтому и в этом случае число $n^2 - n + 1$ не является квадратом целого числа.

***Ответ*:** 0; 1.

Показательные выражения

Пример 61. *Найти все натуральные n, при которых число $2^n + 65$ – точный квадрат.*

Решение. Рассмотрим два случая.

1. Если n четно, то есть $n = 2k,\ k \in \mathbf{N}$, то имеем $2^{2k} + 65 = m^2$, $m \in \mathbf{N}$. Отсюда $m^2 - 2^{2k} = 65$ или $(m - 2^k)(m + 2^k) = 65$.

Так как $65 = 65 \cdot 1 = 13 \cdot 5$ и $m + 2^k > m - 2^k$, то имеем две системы уравнений

а) $\begin{cases} m + 2^k = 65 \\ m - 2^k = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 33 \\ k = 5 \end{cases}$

Значит, $n = 10$.

б) $\begin{cases} m + 2^k = 13 \\ m - 2^k = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 9 \\ k = 2 \end{cases}$

Значит, $n = 4$.

2. Пусть n нечетно. При $n = 1$ число $2 + 65 = 67$ не является квадратом. Пусть $n = 2k + 1,\ k \in \mathbf{N}$, тогда слагаемое $2^{2k+1} = 2 \cdot 4^k$. Так как степень 4 оканчивается на цифру 4 или 6, то $2 \cdot 4^k$ оканчивается на цифру 8 или 2, сумма $2^{2k+1} + 65$ оканчивается цифрой 3 или 7. Но точный квадрат не оканчивается этими цифрами.

***Ответ*:** 4, 10.

Тригонометрические выражения

Пример 62. (ММР, 11 класс, 1999/2000 учебный год). *Найти все такие x, что* $\mathrm{tg}x$ *и* $\mathrm{tg}2x$ являются целыми числами.

Решение. Обозначим $\mathrm{tg}x = n$ и $\mathrm{tg}2x = m$. Исходя из формулы $\mathrm{tg}2x = \dfrac{2\mathrm{tg}x}{1 - \mathrm{tg}^2 x}$, имеем

$$m = \frac{2n}{1 - n^2} \text{ или } m = \frac{-2n}{(n-1)(n+1)}.$$

Так как $\text{НОД}(n; n+1) = 1$ и $\text{НОД}(n;\ n-1) = 1$, то m будет целым только в случае, если знаменатель дроби равен 1, то есть $n = 0$. Значит, $m = 0$. В этом случае $\mathrm{tg}x = 0$ и $x = \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

***Ответ*:** $x = \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

Выражения с факториалами

Пример 63. *Найти все натуральные n, при которых число $1! + 2! + \ldots + n!$ есть точный квадрат.*

Решение. Проверим первые значения n. При $n = 1$ и $n = 3$ получаем числа, являющиеся точными квадратами. Если $n = 2$, то число $1! + 2! = 3$ не является квадратом. Для $n = 4$ число $1! + 2! + 3! + 4! = 33$ не является квадратом. Далее при $n \geq 5$ все слагаемые оканчиваются нулем, поэтому все суммы оканчиваются на цифру 3, то есть числа не являются квадратами.

***Ответ*:** 1; 3.

6. Разные задачи на числа

Последовательности

Арифметическая прогрессия

● Арифметическая прогрессия (а. п.) – числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом d (разность а. п.):

$$a_{n+1} = a_n + d.$$

• Последовательность $-3;\ -1;\ 1;\ 3;\ 5;\ \ldots$ является а. п. с разностью $d = 2$.

• А. п. называют возрастающей, если $d > 0$.

• Формула разности: $d = a_{n+1} - a_n$.

• Формула n-го (общего) члена а. п.:

$$a_n = a_1 + d(n-1).$$

• Формулы суммы n первых членов а. п.:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \ \text{ и } \ S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n .$$

• Характеристическое свойство а. п.:

$$a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n+2}}{2} .$$

• Свойство равноотстоящих членов:

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \ldots .$$

Геометрическая прогрессия

• Геометрическая прогрессия (г. п.) – числовая последовательность, первый член которой отличен от нуля, а каждый член, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же число q (знаменатель г. п.), не равное нулю:

$$b_{n+1} = b_n \cdot q, \quad q \neq 0,\ b_1 \neq 0.$$

• Последовательность $2;\ -1;\ \frac{1}{2};\ -\frac{1}{4};\ \frac{1}{8};$ … является г. п. со знаменателем $q = -\frac{1}{2}$.

• Формула знаменателя: $q = \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$.

• Формула n-го (общего) члена г. п.:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}.$$

• Формулы суммы n первых членов г. п.:

$$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q-1} \quad \text{и} \quad S_n = \frac{b_1\left(q^n - 1\right)}{q-1}$$

• Характеристическое свойство г. п.:

$$b_{n+1}^2 = b_n \cdot b_{n+2} .$$

• Свойство равноотстоящих членов:

$$b_1 \cdot b_n = b_2 \cdot b_{n-1} = \ldots$$

• Сумма бесконечно убывающей г. п. $\left(|\, q \,| < 1\right)$:

$$S = \frac{b_1}{1-q}.$$

Пример 64. *Могут ли числа* 2, 3 *и* 17 *быть членами* (*не обязательно последовательными*) *одной геометрической прогрессии*?

Решение. Пусть данные числа являются членами некоторой геометрической прогрессии. Тогда будем иметь систему уравнений

$$\begin{cases} 3 = 2 \cdot q^n, \\ 17 = 3 \cdot q^m, \end{cases} n,\ m \in \mathbf{N}, \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} q = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{1/n}, \\ q = \left(\dfrac{17}{3}\right)^{1/m}, \end{cases} n,\ m \in \mathbf{N},$$

из которой исключаем переменную q:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^m = \left(\frac{17}{3}\right)^n \Leftrightarrow 3^{n+m} = 2^m \cdot 17^n .$$

Последнее равенство невозможно, так как левая часть – нечетное число, а правая – четное.

Ответ: нет.

Пример 65. (МИОО, 2010). *Последние члены двух конечных арифметических прогрессий* $a_1 = 5,\ \ a_2 = 8, \ldots, a_N$ *и* $b_1 = 9,$ $b_2 = 14, \ldots, b_M$ *совпадают, а сумма всех совпадающих* (*взятых по одному разу*) *членов этих прогрессий равна* 815. *Найти число членов в каждой прогрессии.*

Решение. Используя формулу общего члена, получим уравнение

$$5 + 3(n-1) = 9 + 5(m-1),$$

где $n = 1, \ldots, N$, $m = 1, \ldots, M$. Отсюда $3n = 5m + 2$. Левая часть последнего уравнения делится на 3. Легко показать, что $m = 3k - 1$ ($m = 3k$ или $m = 3k + 1$ не удовлетворяет уравнению). Имеем $3n = 15k - 3$ или $n = 5k - 1$. Отсюда получаем, что общие члены двух прогрессий сами образуют арифметическую прогрессию с общим членом $15l-1$, где $l=1,...,L$.

Используя условие задачи, получаем уравнение

$$\frac{14+15l-1}{2}\cdot l=815$$

или

$$15l^2+13l-1630=0,$$

положительный корень которого $l=10$. Значит, $n=5l-1=49$, $m=3l-1=29$.

Ответ: 49 и 29.

Пример 66. *Найти порядковый номер наибольшего члена последовательности* $\{a_n\}$, *где* $a_n=\dfrac{n^2}{1{,}001^n}$, $n\in\mathbf{N}$.

Решение. Рассмотрим отношение

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)^2\cdot 1{,}001^n}{1{,}001^{n+1}\cdot n^2}=\frac{n^2+2n+1}{n^2}\cdot\frac{1000}{1001}.$$

Сравнивая это отношение с 1, получим

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}>1\Leftrightarrow 1000(n^2+2n+1)>1001n^2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow n^2-2000n<1000\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow n(n-2000)<1000.$$

Так как $n\in\mathbf{N}$., то последнее неравенство выполняется при всех $n\le 2000$ и не выполняется при остальных n. Следовательно, справедлива цепочка неравенств:

$$a_1<a_2<...<a_{2000}<a_{2001}>a_{2002}>a_{2003}>...$$

Отсюда получаем, что a_{2001} – наибольший член последовательности.

Ответ: $n=2001$.

Среднее арифметическое и среднее геометрическое чисел

● Средним арифметическим чисел $a_1, a_2,..., a_n$ называется число $\dfrac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$.

● Средним геометрическим неотрицательных чисел $a_1, a_2,..., a_n$ называется число $\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot...\cdot a_n}$.

● Неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим неотрицательных чисел $a_1, a_2,..., a_n$:

$$\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\ge\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot...\cdot a_n},$$

причем равенство достигается только при $a_1=a_2=...=a_n$. В частности, для любых неотрицательных чисел a и b выполняется неравенство $\dfrac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$, причем равенство достигается только при $a=b$.

Пример 67. (ММР, 7 класс, 2004/2005 учебный год). *Средний рост восьми баскетболистов равен* 195 *см. Какое наибольшее количество из этих игроков может быть ниже, чем* 191 *см*?

Решение. Если один баскетболист имеет рост 230 *см*, то рост каждого из остальных может быть 190 *см*, так как

$$(230+190\cdot 7):8=195.$$

***Ответ*:** семь.

Пример 68. *Два положительных неравных числа являются первым и третьим членами некоторой арифметической прогрессии и первым и третьим членом некоторой геометрической прогрессии. У какой из этих прогрессий сумма трех первых членов больше*?

Решение. Обозначим данные числа через a и b. По характеристическому свойству арифметической прогрессии ее второй член равен $\dfrac{a+b}{2}$, а по характеристическому свойству геометрической прогрессии ее второй член равен $\sqrt{ab}$. По условию $a\ne b$, поэтому выполняется неравенство

$$\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}.$$

Следовательно, сумма первых трех членов арифметической прогрессии больше, так как первый и третий члены прогрессий совпадают.

Ответ: у арифметической.

Суммирование чисел

Пример 69. (ММР, 11 класс, 2000/2001 учебный год) *Последовательные нечетные числа сгруппированы следующим образом*: 1; (3;5); (7;9;11); (13;15;17;19); … . *Чему равна сумма чисел в n-й группе?*

Решение. В группе под номером n содержится n чисел. Количество предшествующих нечетных чисел равно:

$$1+...+(n-1)=\frac{1+(n-1)}{2}\cdot(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}.$$

Количество предшествующих чисел вместе с количеством чисел группы с номером n равно

$$\frac{n(n-1)}{2}+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Так как сумма первых k нечетных чисел вычисляют по формуле $\frac{1+(2k-1)}{2}\cdot k=k^2$, то искомая сумма равна разности суммы первых $\frac{n(n+1)}{2}$ нечетных чисел и суммы первых $\frac{n(n-1)}{2}$ нечетных чисел, то есть

$$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2-\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2=$$

$$=\frac{(n^2+n+n^2-n)(n^2+n-n^2+n)}{4}=$$

$$=\frac{2n^2\cdot 2n}{4}=n^3.$$

Ответ: n^3.

Числа с особыми свойствами

Пример 70. (ММР, 11 класс, 2004/2005 учебный год). *Натуральное число называется примарным, если оно является степенью простого числа с натуральным показателем (например, 7^1 или 13^4). Найти самую длинную цепочку примарных чисел, идущих подряд.*

Решение. Числа 2, 3, 4, 5 удовлетворяют условию задачи. Допустим, имеется цепочка примарных чисел, идущих подряд, содержащая более четырех чисел. Тогда в цепочке имеется хотя бы два четных примарных числа, которые являются степенями единственного четного простого числа. Так как разность этих чисел равна 2, то этими числами могут быть только 2 и 4. Числа 1 и 6 не являются степенью простого числа. Поэтому остается цепочка примарных чисел, состоящая из четырех чисел: 2, 3, 4, 5.

Ответ: 2, 3, 4, 5.

Представление натурального числа в некоторой форме

Пример 71. *Найти все натуральные числа, не представимые в виде суммы двух взаимно простых чисел.*

Решение. Легко показать, что число $5=2+3$ представимо в виде суммы двух взаимно простых чисел, а числа 1, 2, 3, 4 и 6 нельзя представить. Докажем, что каждое натуральное число $n>6$ можно представить в виде суммы двух взаимно простых чисел.

Для нечетного числа $n=2k+1=2+(2k-1)$. Четные числа разобьем на две группы. Числа вида $n=4k=(2k+1)+(2k-1)$ и числа вида $n=4k+2=(2k+3)+(2k-1)$. В каждом случае имеем

$$\text{НОД}(2;2k-1)=1,$$

$$\text{НОД}(2k+1;2k-1)=1,$$

$$\text{НОД}(2k+3;2k-1)=1 \text{ (докажите).}$$

Ответ: 1, 2, 3, 4 и 6.

Пример 72. *Доказать, что простое число не может быть представлено в виде суммы нескольких последовательных нечетных чисел.*

Решение. Пусть имеется n последовательных нечетных чисел $2a+1$, $2a+3$, …, $2a+2n-1$, которые образуют арифметическую прогрессию. Их сумма равна

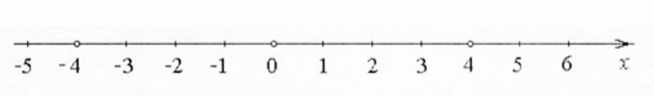
$$\frac{2a+1+2a+2n-1}{2}\cdot n=(2a+n)n.$$

Последнее число не может быть простым числом.

Целочисленные узлы

Пример 73. (МИОО, 2010). *На числовой оси отмечены все точки с целыми координатами. Разрешается прыгать на* 1 *и на* 4 *вправо или влево. Можно ли за* 2010 *таких прыжков попасть из точки* 1 *в точку* 2, *ни разу не попадая в точки с координатами, кратными* 4?

Решение. Точки, соответствующие числам вида $4n$, в которые не разрешается попадать, совершая прыжки, разбивают координатную прямую на интервалы длиной 4.



Так как точки 1 и 2 находятся на одном интервале между соседними точками вида $4n$, то начав движение из точки 1 и завершив его в точке 2 из одного интервала, мы выполним одинаковое количество прыжков длиной 4 единицы вправо и влево, значит, общее количество прыжков на 4 единицы четное. Тогда на прыжки длиной 1 остается четное количество прыжков, так как общее количество прыжков 2010.

При выполнении одного прыжка длиной 1 от числа k вправо (или влево) увеличивается (уменьшается) число k на 1. При выполнении одного прыжка длиной 4 единицы от числа k вправо (или влево) увеличивается (уменьшается) число k на 4 единицы.

Пусть выполнено всего a прыжков на 4 единицы вправо, всего a прыжков на 4 единицы влево, b прыжков на 1 единицу вправо и c прыжков на 1 единицу влево, то получится равенство

$$1+4a-4a+b-c=2$$

(последовательность не важна). Отсюда $b=c+1$. Но общее количество прыжков на 1 единицу равно $b+c=2c+1$ – число нечетное, что противоречит выше приведенному утверждению, что это число прыжков четное. Требование задачи не выполняется.

Ответ: нет.

7. Методы решения уравнений и неравенств в целых числах

7.1. Линейные уравнения

метод прямого перебора

Пример 74. *В клетке сидят кролики и фазаны. Всего у них* 18 *ног. Узнать сколько в клетке тех и других. Укажите все решения.*

Решение. Пусть x – количество кроликов, y – количество фазанов, тогда имеем уравнение $4x+2y=18$ или $2x+y=9$.

Если $x=1$, то $y=7$.

Если $x=2$, то $y=5$.

Если $x=3$, то $y=3$.

Если $x=4$, то $y=1$.

При $x=5$ получаем $2\cdot 5=10>9$.

Ответ**:** (1;7), (2;5), (3;3), (4;1).

использование неравенств

Пример 75. *Решить в натуральных числах уравнение* $5x+8y=39$.

Решение. Для уменьшения перебора вариантов рассмотрим неравенства

$$\begin{cases}5x=39-8y\ge 0\\ 8y=39-5x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y\le 4\\ x\le 7\end{cases}$$

Проведем перебор по неизвестной y.

Если $y=1$, то $x=6{,}2$ не является натуральным числом.

Если $y=2$, то $x=4{,}6$ не является натуральным числом.

Если $y=3$, то $x=3$.

Если $y=4$, то $x=1{,}4$ не является натуральным числом.

Ответ**:** (3; 3).

использование отношения делимости

Пример 76. *Имеются контейнеры двух видов: по* 130 *кг и* 160 *кг. Сколько было контейнеров первого и сколько второго вида, если вместе они весят* 3 *тонны? Укажите все решения.*

Решение. Обозначим количество контейнеров первого вида через x, второго – через y. Получаем уравнение $130x+160y=3000$ или $13x+16y=300$. Далее имеем

$$13x + 13y + 3y = 13 \cdot 23 + 1,$$
$$3y - 1 = 13(23 - x - y).$$

Отсюда следует, что разность $3y - 1$ делится на 13.

Если $3y - 1 = 0$, то y не является натуральным числом.

Если $3y - 1 = 13$, то y не является натуральным числом.

Если $3y - 1 = 26$, то $y = 9$ и $x = 12$.

Если $3y - 1 = 39$, то y не является натуральным числом.

Если $3y - 1 = 52$, то y не является натуральным числом.

Если $3y - 1 = 65$, то $y = 22$, но $16 \cdot 22 = 352 > 300$.

***Ответ*:** 12 контейнеров по 130 кг и 9 по 160 кг.

выделение целой части

Пример 77. *У осьминога* 8 *ног, а у морской звезды* 5. *Сколько в аквариуме тех и других, если всего у них* 39 *ног*?

Решение. Пусть x – количество осьминогов, y – количество морских звезд, тогда получаем уравнение $8x + 5y = 39$.

Выразим y из уравнения и выделим целую часть:

$$y = \frac{39 - 8x}{5} = 7 - x - \frac{3x - 4}{5}.$$

Отсюда следует, что разность $3x - 4$ делится на 5.

Если $3x - 4 = 0$, то x не является натуральным числом.

Если $3x - 4 = 5$, то $x = 3$ и $y = 3$.

Если $3x - 4 = 10$, то x не является натуральным числом.

Если $3x - 4 = 15$, то x не является натуральным числом.

Если $3x - 4 = 20$, то $x = 8$, но $8 \cdot 8 = 64 > 39$.

***Ответ*:** 3 и 3.

Замечание. В двух последних примерах использовано отношение делимости, при этом уравнения приводились к разному виду. В этих примерах для уменьшения перебора вариантов можно было дополнительно использовать неравенства.

метод остатков

Пример 78. *Решить в целых числах уравнение* $3x - 4y = 1$.

Решение. Перепишем уравнение в виде $3x = 4y + 1$. Поскольку левая часть уравнения делится на 3, то должна делиться на 3 и правая часть. Рассмотрим три случая.

1. Если $y = 3m$, где $m \in \mathbf{Z}$, то $4y + 1 = 12m + 1$ не делится на 3.

2. Если $y = 3m + 1$, то $4y + 1 = 4(3m + 1) + 1 = 12m + 5$ не делится на 3.

3. Если $y = 3m + 2$, то $4y + 1 = 4(3m + 2) + 1 = 12m + 9$ делится на 3, поэтому $3x = 12m + 9$, $x = 4m + 3$.

***Ответ*:** $x = 4m + 3$, $y = 3m + 2$, где $m \in \mathbf{Z}$.

метод «спуска»

Пример 79. *Решить в целых числах уравнение* $5x - 7y = 3$.

Решение. Выразим из уравнения то неизвестное, коэффициент при котором меньше по модулю:

$$x = \frac{7y + 3}{5} = y + \frac{2y + 3}{5}.$$

Дробь $\frac{2y + 3}{5}$ должна быть равна целому числу. Положим $\frac{2y + 3}{5} = z$, где z – целое число. Тогда $2y + 3 = 5z$. Из последнего уравнения выразим то неизвестное, коэффициент при котором меньше по модулю, и проделаем аналогичные преобразования:

$$y = \frac{5z - 3}{2} = 3z - \frac{z + 3}{2}.$$

Дробь $\frac{z + 3}{2}$ должна быть целым числом. Обозначим $\frac{z + 3}{2} = t$, где t – целое число. Отсюда $z = 2t - 3$. Последовательно возвращаемся к неизвестным x и y:

$$y = 3(2t - 3) - t = 5t - 9,$$
$$x = y + z = 5t - 9 + 2t - 3 = 7t - 12.$$

***Ответ*:** $x = 7t - 12$, $y = 5t - 9$, где $t \in \mathbf{Z}$.

метод последовательного уменьшения коэффициентов по модулю

Пример 80. *Решить в целых числах уравнение* $79y-23x=1$.

Решение. Проведем деление с остатком $79=23\cdot 3+10$ и перепишем исходное уравнение в виде

$$23x=79y-1=69y+10y-1,$$
$$23x-69y=10y-1.$$

Левая часть последнего уравнения делится нацело на 23, поэтому и правая часть должна делиться на 23. Имеем

$$10y-1=23t, \text{ где } t\in \mathbf{Z}.$$

Для полученного нового уравнения повторим процедуру уменьшения коэффициентов.

$$10y=23t+1=(2\cdot 10+3)t+1;$$
$$10y-20t=3t+1;\ 3t+1=10u, \text{ где } u\in \mathbf{Z}.$$

Проведем еще раз процедуру уменьшения коэффициентов.

$$3t+1=10u=(3\cdot 3+1)u;\ 3t-9u=u-1;$$
$$u-1=3n,\ n\in \mathbf{Z}.$$

Выразим x и y через n. Так как $u=3n+1$, то

$$3t=10u-1=10(3n+1)-1=30n+9;$$
$$t=10n+3.$$
$$10y=23t+1=23(10n+3)+1=230n+70;$$
$$y=23n+7.$$
$$23x=79y-1=79(23n+7)-1=79\cdot 23n+552;$$
$$x=79n+24.$$

Ответ: $x=79n+24;\ y=23n+7$, где $n\in \mathbf{Z}$.

Замечание. В последних двух примерах применен метод последовательного уменьшения коэффициентов по модулю, при этом уравнения приводились к разному виду.

использование формул

Теорема. Уравнение

$$a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n=b$$

разрешимо в целых числах тогда и только тогда, когда $d\,|\,b$, где d=НОД$(a_1,a_2,...,a_n)$.

Теорема. Пусть уравнение $ax+by=c$ разрешимо в $\mathbf{Z}$ и пара $(x_0;y_0)$ является частным решением этого уравнения. Тогда множеством всех решений в $\mathbf{Z}$ данного уравнения является множество пар $(x;y)$, где

$$\begin{cases} x=x_0-\dfrac{b}{d}\cdot t, \\ y=y_0+\dfrac{a}{d}\cdot t, \end{cases} \text{ где } t\in \mathbf{Z}.$$

Следствие. Пусть a и b взаимно просты и $(x_0;y_0)$ – какое-нибудь решение уравнения

$$ax+by=c \ (*)$$

Тогда формулы

$$x=x_0-b\cdot t,$$
$$y=y_0+a\cdot t$$

при $t\in \mathbf{Z}$ дают все решения уравнения (*).

Пример 81. (МГУ, 1969). *Остаток от деления некоторого натурального числа n на* 6 *равен* 4, *остаток от деления n на* 15 *равен* 7. *Чему равен остаток от деления n на* 30?

Решение. Из условия задачи следует, что существует натуральное число k такое, что $n=6k+4$. Аналогично имеем $n=15l+7$, где $l\in \mathbf{N}$. Исключая из этих двух равенств n, получим уравнение

$$2k-5l=1.\ (*)$$

Для решения этого уравнения найдем какое-нибудь частное решение в целых (не обязательно неотрицательных) числах. Подбором в качестве такого частного решения можно взять, например, $k=-2$, $l=-1$. Согласно следствия уравнение (*) имеет решения

$$k=-2+5t,\ l=-1+2t, \text{ где } t\in \mathbf{Z}.$$

Чтобы числа k и l были неотрицательными, параметр t должен принимать натуральные значения. Теперь имеем

$$n=6(5t-2)+4=30t-8=$$
$$=30(t-1)+22.$$

Ответ: 22.

Пример 82. *Решить в целых числах уравнение* $147x-25y=14$.

Решение. Числа 147 и –25 взаимно просты, следовательно, уравнение разрешимо в $\mathbf{Z}$. Найдем одно частное решение:

$$147=(-25)\cdot(-5)+22,$$
$$-25=22\cdot(-2)+19,$$
$$22=19\cdot1+3,$$
$$19=3\cdot6+1.$$

$$1=19-3\cdot6=19-6\cdot(22-19)=7\cdot19-6\cdot22=$$
$$=7\cdot(-25-22\cdot(-2))-6\cdot22=7\cdot(-25)+8\cdot22=$$
$$=7\cdot(-25)+8\cdot(147+5\cdot(-25))=$$
$$=8\cdot147+47\cdot(-25).$$

Итак, $1=147\cdot8+(-25)\cdot47$. Следовательно,

$$14=147\cdot112-25\cdot658.$$

Значит, пара чисел (112; 658) образует частное решение данного уравнения. Следовательно, общее решение

$$\begin{cases} x=112+25t \\ y=658+147t, \end{cases} \quad \text{где } t\in\mathbf{Z}.$$

использование конечных цепных дробей

Цепная дробь (или **непрерывная дробь**) – это математическое выражение вида

$$[a_0;a_1,a_2,a_3,\ ...]=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+...}}},$$

где a_0 есть целое число и все остальные a_n натуральные числа (то есть неотрицательные целые). Любое вещественное число можно представить в виде цепной дроби (конечной или бесконечной). Число представляется конечной цепной дробью тогда и только тогда, когда оно рационально. Для рациональных чисел может быть использован алгоритм Евклида для быстрого получения разложения в цепную дробь.

Информацию о цепных дробях можно найти, например, в книге М.Б. Балк, Г.Д. Балк. Математика после уроков. М, «Просвещение», 1971.

Пример 83. *Решить в целых числах уравнение* $127x-52y+1=0$

Решение. Преобразуем отношение коэффициентов при неизвестных. Прежде всего, выделим целую часть неправильной дроби $\frac{127}{52}$;

$$\frac{127}{52}=2+\frac{23}{52}$$

Правильную дробь $\frac{23}{52}$ заменим равной ей дробью $\cfrac{1}{\frac{52}{23}}$.

Тогда получим $\frac{127}{52}=2+\cfrac{1}{\frac{52}{23}}$. Проделаем такие же преобразования с полученной в знаменателе неправильной дробью $\frac{52}{23}$.

Теперь исходная дробь примет вид:

$$\frac{127}{52}=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\frac{23}{6}}}$$

Повторяя те же рассуждения для дроби $\frac{23}{6}$, получим

$$\frac{127}{52}=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{\frac{6}{5}}}}.$$

Выделяя целую часть неправильной дроби $\frac{6}{5}$, придем к окончательному результату:

$$\frac{127}{52}=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5}}}}.$$

Мы получили выражение, которое называется *конечной цепной* или *непрерывной дробью.* Отбросив последнее звено этой цепной дроби – одну пятую, превратим получающуюся при этом новую цепную дробь в простую и вычтем ее из исходной дроби $\frac{127}{52}$:

$$2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4}}=2+\frac{4}{9}=\frac{22}{9},$$

$$\frac{127}{52}-\frac{22}{9}=\frac{1143-1144}{52\cdot 9}=-\frac{1}{52\cdot 9}.$$

Приведем полученное выражение к общему знаменателю и отбросим его, тогда

$$127\cdot 9-52\cdot 22+1=0.$$

Из сопоставления полученного равенства с уравнением $127x-52y+1=0$ следует, что $x=9$, $y=22$ будет решением этого уравнения, и согласно теореме все его решения будут содержаться в формулах $x=9+52t$, $y=22+127t$, где $t\in\mathbf{Z}$.

Ответ: $x=9+52t$, $y=22+127t$, где $t\in\mathbf{Z}$.

7.2. Нелинейные уравнения

Метод разложения на множители

вынесение общих множителей за скобку

Пример 84. *Решить в целых числах уравнение* $2x^3+xy-7=0$.

Решение. Приведем данное уравнение к виду

$$x(2x^2+y)=7.$$

Так как

$$7=1\cdot 7=7\cdot 1=-1\cdot(-7)=-7\cdot(-1),$$

то рассмотрим четыре системы уравнений:

1) $\begin{cases}x=1\\2x^2+y=7\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x=7\\2x^2+y=1\end{cases}$

3) $\begin{cases}x=-1\\2x^2+y=-7\end{cases}$ 4) $\begin{cases}x=-7\\2x^2+y=-1\end{cases}$

Из каждой системы получаем решения.

Ответ: $(1;5)$; $(-1;-9)$; $(7;-97)$; $(-7;-99)$.

применение формул сокращенного умножения

Пример 85. *Найти все пары натуральных чисел, разность квадратов которых равна* 55.

Решение. Запишем условие задачи в виде уравнения $n^2-k^2=55$ или $(n-k)(n+k)=55$. Так как $n+k>0$, то $n-k>0$, причем $n+k>n-k$.

Поскольку $55=1\cdot 55=5\cdot 11$, то возможны два случая

$$\begin{cases}n-k=1\\n+k=55\end{cases}\text{ или }\begin{cases}n-k=5\\n+k=11\end{cases}$$

Решая эти уравнения, получим два ответа: $n=28$, $k=27$ и $n=8$, $k=3$.

Ответ: $(28;27)$; $(8;3)$.

способ группировки

Пример 86. *Решить в целых числах уравнение* $xy+3x-y=6$.

Решение. Запишем уравнение в виде

$$x(y+3)-(y+3)=3\text{ или }(x-1)(y+3)=3.$$

Так как $3=1\cdot 3=3\cdot 1=-1\cdot(-3)=-3\cdot(-1)$, то рассмотрим четыре системы

1) $\begin{cases}x-1=1,\\y+3=3.\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x-1=3,\\y+3=1.\end{cases}$

3) $\begin{cases}x-1=-1,\\y+3=-3.\end{cases}$ 4) $\begin{cases}x-1=-3,\\y+3=-1.\end{cases}$

Из каждой системы получаем решения.

Ответ: $(4;-2)$; $(-2;-4)$; $(2;0)$; $(0;-6)$.

разложение квадратного трехчлена

Пример 87. *Решить в целых числах уравнение* $x^2-3xy+2y^2=11$.

Решение. Решим уравнение

$$x^2-3xy+2y^2=0$$

относительно неизвестной x: $x_1=y$ и $x_2=2y$.

Тогда получаем $(x-y)(x-2y)=11$. Так как $11=1\cdot 11=11\cdot 1=-1\cdot(-11)=-11\cdot(-1)$, то рассмотрим четыре системы уравнений:

1) $\begin{cases} x-y=1, \\ x-2y=11. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-y=11, \\ x-2y=1. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x-y=-1, \\ x-2y=-11. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x-y=-11, \\ x-2y=-1. \end{cases}$

Из каждой системы получаем решения.

Ответ: $(21;10)$; $(-9;-10)$; $(-21;-10)$; $(9;10)$.

использование параметра

Пример 88. *Решить в целых числах уравнение* $2x^2-2xy+9x+y=2$.

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$2x^2-x(2y-9)+y-2+a=a$$

и разложим левую часть уравнения на множители как квадратный трехчлен относительно x. Находим дискриминант $D=4y^2-44y+97-8a$. Очевидно, если $97-8a=121$, то дискриминант будет полным квадратом. При этом $a=-3$ и

$$x=\frac{2y-9\pm(2y-11)}{4}.$$

Отсюда $x_1=0{,}5$ и $x_2=y-5$. Уравнение принимает вид $(2x-1)(x-y+5)=-3$. Рассмотрите самостоятельно решение последнего уравнения.

Ответ: $(1;9)$; $(-1;3)$; $(2;8)$; $(0;2)$.

Метод решения относительно одной переменной

выделение целой части

Пример 89. (МГУ, 1997). *Найти все пары целых чисел* x *и* y*, удовлетворяющие уравнению*

$$3xy+14x+17y+71=0.$$

Решение. Выразим из данного уравнения y через x: $y=-\frac{14x+71}{3x+17}$.

При этом следует отметить, что величина $3x+17\neq 0$ (так как x – целое число). Выделим из дроби в правой части этого равенства правильную алгебраическую дробь (у которой степень числителя меньше степени знаменателя):

$$y=-\frac{4(3x+17)+2x+3}{3x+17}=-4-\frac{2x+3}{3x+17}.$$

Умножим обе части последнего равенства на 3:

$$3y=-12-\frac{6x+9}{3x+17}=-12-2+\frac{25}{3x+17}$$

$$\text{или } 3y+14=\frac{25}{3x+17}.$$

Поскольку числа $3y$ и 14 – целые, то $3x+17$ должно быть делителем числа 25: $3x+17=\pm1;\pm5;\pm25$ – всего 6 возможностей. Отсюда для x получаем три возможных значения: –4, –6, –14 (в остальных трех случаях x не является целым). Соответствующие значения y равны –3, –13, –5.

Ответ: $(-4;-3)$; $(-6;-13)$; $(-14;-5)$.

Замечание. В данном примере суть выделения целой части состоит в избавлении переменной x из числителя (сравните с примером 77). В решении был использован прием домножения обеих частей равенства на коэффициент при x в знаменателе. Этот прием домножения также удобно использовать при решении уравнений методом разложения на множители.

использование дискриминанта (неотрицательность)

Пример 90. *Решить в целых числах уравнение*

$$3(x^2+xy+y^2)=x+8y.$$

Решение. Рассмотрим уравнение, как квадратное относительно x:

$$3x^2+(3y-1)x+3y^2-8y=0.$$

Найдем дискриминант уравнения $D=-27y^2+90y+1$. Данное уравнение имеет корни, если $D\geq 0$, т.е. $-27y^2+90y+1\geq 0$. Так как $y\in Z$, то получаем $0\leq y\leq 3$. Перебирая эти значения, получим, что исходное уравнение в целых числах имеет решения $(0;0)$ и $(1;1)$.

Ответ: $(0;0)$; $(1;1)$.

использование дискриминанта (полный квадрат)

Пример 91. *Решить в целых числах уравнение* $x^2 - xy + y^2 = x + y$.

Решение. Рассмотрим уравнение, как квадратное относительно x:

$$x^2 - (y+1)x + y^2 - y = 0.$$

Его дискриминант $D = -3y^2 + 6y + 1 = t^2$ должен быть квадратом некоторого целого числа t.

Получаем новое уравнение

$$3y^2 - 6y - 1 + t^2 = 0;\ 3(y-1)^2 + t^2 = 4.$$

Из последнего уравнения следует, что $t^2 \le 4$, т.е. $|t| \le 2$.

1. Если $t^2 = 0$, то уравнение $3(y-1)^2 = 4$ не имеет целого решения y.

2. Если $t^2 = 1$, то уравнение $3(y-1)^2 = 3$ имеет целые решения $y_1 = 2$ и $y_2 = 0$. При $y = 2$ получаем квадратное уравнение $x^2 - 3x + 2 = 0$ с корнями $x = 1$ или $x = 2$. При $y = 0$ получаем квадратное уравнение $x^2 - x = 0$ с корнями $x = 0$ или $x = 1$.

3. Если $t^2 = 4$, то уравнение $3(y-1)^2 = 0$ имеет одно целое решение $y = 1$. При $y = 1$ получаем квадратное уравнение $x^2 - 2x = 0$ с корнями $x = 0$ или $x = 2$.

***Ответ*:** $(1;2)$; $(2;2)$; $(0;0)$; $(1;0)$, $(0;1)$; $(2;1)$

Метод оценки

использование известных неравенств

Пример 92. *Решить в натуральных числах уравнение* $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$.

Решение. Пусть для определенности $x \le y$. Проведем перебор для первых значений неизвестной x.

1. Если $x = 1$, то получаем неверное равенство $1 + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$, так как $1 + \frac{1}{y} > 1$ при любых натуральных y.

2. Если $x = 2$, то получаем неверное равенство $\frac{1}{2} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$, так как $\frac{1}{2} + \frac{1}{y} > \frac{1}{2}$ при любых натуральных y.

3. Если $x = 3$, то получаем

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2},\ \frac{1}{y} = \frac{1}{6},\ y = 6.$$

4. Если $x = 4$, то получаем

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2},\ \frac{1}{y} = \frac{1}{4},\ y = 4.$$

5. Если $x = 5$, то получаем

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2},\ \frac{1}{y} = \frac{3}{10},\ y = \frac{10}{3} \notin \mathbf{N}.$$

Пусть $x \ge 6$. По условию $y \ge x$, следовательно, $y \ge 6$. Тогда $\frac{1}{x} \le \frac{1}{6}$, $\frac{1}{y} \le \frac{1}{6}$, а значит, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \le \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$. Таким образом, при $x \ge 6$ и $y \ge x$ исходное уравнение решений не имеет.

Заметим, что в уравнении $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$ неизвестные x и y равноправны, поэтому снимая условие $y \ge x$, имеем еще одно решение $(6;3)$. Кроме того, можно сделать вывод, что при $x \ge 6$ и $y \ge 6$ исходное уравнение не имеет решений.

***Ответ*:** $(4;4)$; $(6;3)$; $(3;6)$.

Пример 93. (ММО, 1963, 8 класс). *Решить в целых числах уравнение*

$$\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} = 3.$$

Решение. Можно вначале найти решения только в натуральных числах, так как если $(x_0; y_0; z_0)$ – решение, то, изменив знак у любых двух чисел этой тройки, снова получим решение. Данное уравнение умножим на $2xyz$ и воспользуемся неравенством $a^2 + b^2 \ge 2ab$;

$$6xyz = 2x^2y^2 + 2x^2z^2 + 2y^2z^2 =$$
$$= (x^2y^2 + x^2z^2) + (x^2y^2 + y^2z^2) + (x^2z^2 + y^2z^2) \ge$$
$$\ge 2x^2yz + 2y^2xz + 2z^2xy = 2xyz(x + y + z),$$

откуда $x+y+z\le 3$. Но x, y, z – натуральные, поэтому $x=y=z=1$ единственное решение в натуральных числах. Остальные решения исходного уравнения таковы: $(-1;-1;1)$; $(1;-1;-1)$; $(-1;1;-1)$.

Ответ: $(1;1;1)$; $(-1;-1;1)$; $(1;-1;-1)$; $(-1;1;-1)$.

приведение к сумме неотрицательных выражений

Пример 94. (ММО, 1941, 9-10 классы). *Решить в целых числах уравнение*

$$x+y=x^2-xy+y^2.$$

Решение. Приведем уравнение к виду

$$(x-1)^2+(y-1)^2+(x-y)^2=2.$$

Так как $(x-1)^2\le 2$, то имеем $(x-1)^2=0$ или $(x-1)^2=1$. Отсюда получаем три значения x: 1, 0, 2. Подставляя эти значения в исходное уравнение, найдем значения y.

Ответ: $(0;0);(1;0);(0;1);(2;1);(1;2);(2;2)$.

Метод остатков

Пример 95. *Решить в целых числах уравнение* $3^m+7=2^n$.

Решение. 1. Если $m<0$, то уравнение не имеет решений в целых числах. Действительно, $0<3^m<1$, тогда правая часть уравнения $3^m=2^n-7$ является целым числом при $n\ge 0$ (что невозможно) или правая часть уравнения $7=2^n-3^m$ меньше 7 при $n<0$.

2. Пусть $m=0$, тогда из уравнения $2^n=8$ получаем $n=3$.

3. Теперь считаем, что $m>0$. Так как уравнение содержит степень с основанием 3, то имеет смысл рассмотреть остатки при делении на 3. Левая часть исходного уравнения при делении на 3 имеет остаток 1.

Выясним, когда правая часть 2^n имеет остаток 1. Легко показать, что при четном $n=2k$ выражение

$$2^{2k}=4^k=(3+1)^k=$$
$$=3^k+3^{k-1}+\ldots+3+1=3t+1$$

имеет остаток 1. При нечетном $n=2k+1$ выражение

$$2^{2k+1}=2\cdot 4^k=2(3t+1)=6t+2$$

имеет остаток 2.

Итак, $n=2k$. Тогда уравнение запишем в виде $3^m=2^{2k}-7=4^k-7$. Правая часть последнего уравнения имеет остаток 1 при делении на 4 (число -7 попадает в множество-класс остатков, содержащее 1).

Выясним, когда левая часть 3^n имеет остаток 1. Легко показать, что при четном $m=2p$ выражение

$$3^{2p}=9^p=(8+1)^p=8^k+8^{k-1}+\ldots+8+1=$$
$$=8s+1$$

имеет остаток 1. При нечетном $m=2p+1$ выражение

$$3^{2p+1}=3\cdot 9^p=3(8s+1)=24s+3$$

имеет остаток 3.

Итак, $m=2p$. Тогда уравнение можно записать в виде

$$2^{2k}-3^{2p}=7 \text{ или } (2^k-3^p)(2^k+3^p)=7.$$

Так как

$$2^k+3^p>2^k-3^p \text{ и } 2^k+3^p>0,$$

то имеем единственный случай

$$\begin{cases}2^k+3^p=7\\ 2^k-3^p=1.\end{cases}$$

Отсюда получаем $k=2,\ p=1$ и $m=2$, $n=4$.

Ответ: $m=2,\ n=4$ или $m=0,\ n=3$.

Метод «спуска»

метод конечного «спуска»

Пример 96. *Решить в целых числах уравнение* $2x^2-5y^2=7$.

Решение. Так как $2x^2$ – четное число, а 7 – нечетное, то $5y^2$ должно быть нечетным, т.е. y – нечетное. Пусть $y=2z+1$, где $z\in\mathbf{Z}$, тогда данное уравнение можно переписать в виде $x^2-10z^2-10z=6$.

Отсюда видно, что x должно быть четным. Пусть $x=2m$, тогда последнее уравнение примет вид $2m^2-5z(z+1)=3$, что невозможно, так как число $z(z+1)$ – четно, а разность двух четных чисел не может быть равна нечетному числу. Таким образом, данное уравнение не имеет решений в целых числах.

***Ответ*: нет решений.**

метод бесконечного «спуска»

Пример 97. *Решить в целых числах уравнение* $2x^2-5y^2=z^2$.

Решение. Запишем уравнение в виде $2x^2-z^2=5y^2$. Отсюда следует, что левая часть последнего уравнения кратна 5. Рассмотрим остатки при делении выражения $2x^2-z^2$ на 5.

x	0	1	2	3	4
x^2	0	1	4	4	1
$2x^2$	0	2	3	3	2

Из таблицы видно, что для разрешимости в целых числах исходного уравнения числа x и z должны быть кратны 5.

Предположим, что $x=5x_1$, $z=5z_1$, тогда исходное уравнение (после сокращения на 5) примет вид $10x_1^{\ 2}-y^2=5z_1^{\ 2}$. Отсюда следует, что значения y кратны 5, т.е. $y=5y_1$. Последнее уравнение (после сокращения на 5) примет тот же вид $2x_1^{\ 2}-5y_1^{\ 2}=z_1^{\ 2}$, что и исходное уравнение.

Из приведенных рассуждений следует, что числа x, y и z должны быть кратными 5, далее числа x_1, y_1, z_1, т.е. $\frac{x}{5}$, $\frac{y}{5}$, $\frac{z}{5}$ также кратны 5. Итак, оказалось, что числа, удовлетворяющие исходному уравнению, должны делиться на 5, и сколько бы раз не делили эти числа, будем получать новые числа, которые также делятся на 5 и удовлетворяют уравнению. Единственное число, обладающее этим свойством, есть нуль. Следовательно, уравнение $2x^2-5y^2=z^2$ имеет единственное решение в целых числах $(0;0;0)$.

***Ответ*: $(0;0;0)$.**

Метод доказательства от противного

Пример 98. *Доказать, что уравнение*

$$x^2+y^2+z^2=2xyz$$

неразрешимо в натуральных числах.

Решение. Предположим, что данное уравнение разрешимо в натуральных числах. Тогда так как его правая часть делится на 2, то и левая часть также должна делиться на 2. Это возможно, если либо одно из них четное, а два других нечетные, либо x, y, z – четные числа. Рассмотрим эти случаи.

1. Пусть, например, $x=2x_1$, $y=2y_1+1$, $z=2z_1+1$. Подставляя эти числа в исходное уравнение, получим:

$$4x_1^2+4y_1^2+4y_1+4z_1^2+4z_1+2= \\ =4x_1(2y_1+1)(2z_1+1).$$

После сокращения на 2, получаем

$$2x_1^2+2y_1^2+2y_1+2z_1^2+2z_1+1= \\ =2x_1(2y_1+1)(2z_1+1).$$

В последнем уравнении правая часть – четное число, а левая – нечетное число. Следовательно, решений нет.

2. Пусть x, y, z – четные числа, т.е. $x=2x_1$, $y=2y_1$, $z=2z_1$. Подставляя эти числа в исходное уравнение, получим:

$$x_1^2+y_1^2+z_1^2=4x_1y_1z_1.$$

Применяя к полученному уравнению те же рассуждения, что и для исходного уравнения, находим $x_1=2x_2$, $y_1=2y_2$, $z_1=2z_2$. Тогда $x_2^2+y_2^2+z_2^2=8x_2y_2z_2$ и т.д. На каждом шаге выполняется условие $x_k=2x_{k+1}$, $y_k=2y_{k+1}$, $z_k=2z_{k+1}$. В итоге получаем, например, для x бесконечную последовательность

$$x>x_1>x_2>...>x_k>x_{k+1}>...>0.$$

Но эта последовательность натуральных чисел должна быть конечной. Получаем противоречие. Следовательно, исходное уравнение неразрешимо в натуральных числах.

Замечание. В данном примере использован *метод бесконечного спуска*, заключающийся в построении алгоритма, приводящего к созданию бесконечной последовательности убывающих целых положительных чисел. Поскольку убывающая последовательность целых положительных чисел имеет лишь конечное число членов, то получается противоречие.

Параметризация уравнения

Пример 99. *Решить в целых числах уравнение* $x^3+y^3+z^3=2$.

Решение. Положим $x=a+b$, $y=a-b$. Так как $x^3+y^3=2a^3+6ab^2$, то исходное уравнение принимает вид $2a^3+6ab^2+z^3=2$.

Положив $a=1$, получим $z^3=-6b^2$. Считаем теперь $b=6t^3$. Отсюда $x=1+6t^3$, $y=1-6t^3$, $z=-6t^2$. Таким образом, получено бесконечное множество решений исходного уравнения, соответствующих целочисленным значениям параметра ***t*.**

Ответ: $x=1+6t^3$, $y=1-6t^3$, $z=-6t^2$, где $t\in\mathbf{Z}$.

Функционально-графический метод

Пример 100. (МИОО 2010)). *Найти все пары натуральных* k *и* n *таких, что* $k<n$ *и* $(n)^k=(k)^n$.

Решение. 1. Преобразуем исходное равенство:

$$(n)^k=(k)^n \Leftrightarrow k\ln n=n\ln k \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{\ln n}{n}=\frac{\ln k}{k} \Leftrightarrow f(n)=f(k),$$

где $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$, $x>0$.

2. $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$, поэтому $f'(x)\le 0$ при $x\ge e$ и $f'(x)\ge 0$ при $0<x\le e$. Значит, функция $f(x)$ возрастает на $(0;e]$ и убывает на $[e;+\infty)$ (см. рис. 1). Так как $k<n$, равенство $f(n)=f(k)$ может выполняться только при условии $k<e<n$, откуда следует $k=1$ или $k=2$, причем для каждого k может найтись не более одного значения n, удовлетворяющего уравнению в паре с этим значением k.

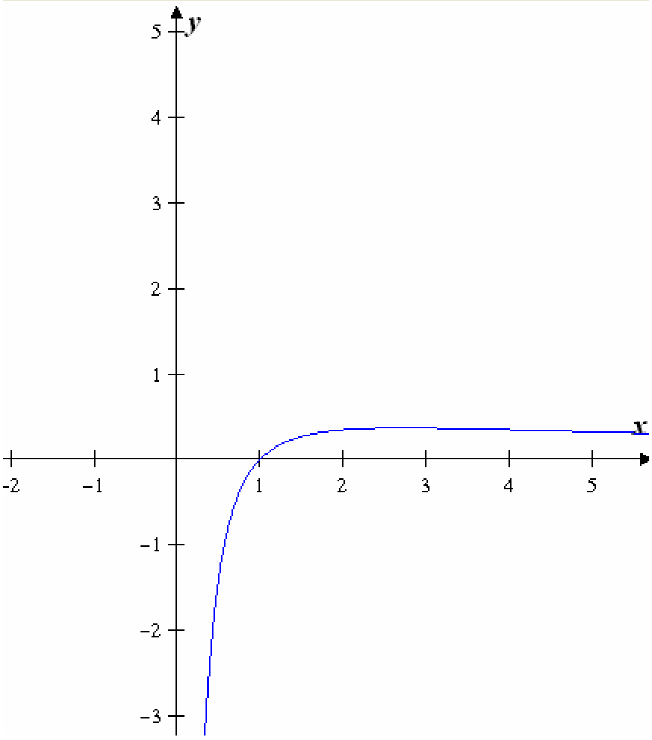


Рис. 1

3. В случае $k=1$ из данного уравнения получаем $n=1$, что не соответствует условию $k<n$.

4. В случае $k=2$ получаем уравнение $n^2=2^n$, решение которого легко находится подбором: $n=4$, причем в силу вышесказанного это единственное решение $n>e$.

Ответ: $k=2$, $n=4$.

7.3. Неравенства

Метод математической индукции

Пример 101. (МГУ, 1972). *Найти все целые решения неравенства*

$$x-1<\log_6(x+3).$$

Решение. Допустимые значения x определяются из условия $x+3>0$, $x\in\mathbf{Z}$, т.е. $x=-2,-1,0,1,\ldots$ Начнем последовательно проверять.

1. $x=-2$. Получаем $-3<\log_6 1=0$ (верно).

2. $x=-1$. Получаем $-2<0<\log_6 2$ (верно).

3. $x=0$. Получаем $-1<0<\log_6 3$ (верно).

4. $x=1$. Получаем $0<\log_6 4$ (верно).

Для остальных целых x неравенство не выполняется. Докажем по индукции неравенство

$$n-1>\log_6(n+3),\ \ n\ge 2,\ \ n\in\mathbf{N}.$$

База индукции: $n=2$ и $1=\log_6 6>\log_6 5$ (верно). Индуктивный переход: для любого целого $n=k\ge 2$, если выполнено

$$k-1>\log_6(k+3),\quad (*)$$

то и выполнено для $n=k+1$

$$(k+1)-1=k>\log_6(k+4).$$

Прибавим к неравенству $(*)$ по 1 и проверим, что справедливо неравенство

$$\log_6(k+3)+1>\log_6(k+4).$$

В самом деле,

$$\log_6(k+3)+1=\log_6(6k+18)>\log_6(k+4),$$

поскольку $6k+18>k+4,\ \ 5k+14>0,$ что верно для любого $k\ge 2$. Индуктивный переход обоснован.

Ответ: $-2,-1,0,1.$

Использование области определения

Пример 102. **(МГУ, 1973).** *Найти все целые числа x, удовлетворяющие неравенству*

$$3^{\frac{5}{2}\log_3(13-4x)}-3^{\log_2(3x-2)}<47.$$

Решение. Допустимые значения x определяются системой неравенств

$$\begin{cases}13-4x>0,\\ 3x-2>0,\\ x\in\mathbf{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\ \begin{cases}x<\dfrac{13}{4},\\ x>\dfrac{2}{3},\\ x\in\mathbf{Z}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \begin{cases}\dfrac{2}{3}<x<\dfrac{13}{4},\\ x\in\mathbf{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\ x=1;2;3.$$

Подставляем последовательно найденные значения x в неравенство, предварительно его упростив.

$$47+3^{\log_2(3x-2)}>(13-4x)^{\frac{5}{2}}.$$

1. $x=1$. Тогда

$$47+3^{\log_2 1}>9^{\frac{5}{2}}\ \Leftrightarrow\ 48>243\ \text{(неверно)}.$$

2. $x=2$. Тогда $47+3^{\log_2 4}>5^{\frac{5}{2}}\ \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 56>5^{\frac{5}{2}}\ \Leftrightarrow\ 56^2>5^5\ \Leftrightarrow\ 3136>3125$$
(верно).

3. $x=3$. Тогда

$$47+3^{\log_2 7}>47+3^2=56>1^{\frac{5}{2}}\ \Leftrightarrow\ 56>1$$

(верно).

Ответ: 2; 3.

Использование монотонности

Пример 103. **(МГУ, 1976).** *Найти все целые z, удовлетворяющие неравенству*

$$\sqrt[6]{z+1}<\sqrt[8]{6-z}.$$

Решение. Допустимые значения z определяются из системы

$$\begin{cases}z+1\ge 0\\ 6-z\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\ -1\le z\le 6.$$

Заметим, что левая часть неравенства увеличивается с ростом *z*, а правая – уменьшается. Это обстоятельство позволяет упростить перебор.

1. При $z=-1$ имеем $0<\sqrt[8]{7}$ (верно).
2. При $z=0$ имеем $1<\sqrt[8]{6}$ (верно).
3. При $z=1$ имеем

$$\sqrt[6]{2}<\sqrt[8]{5}\ \Leftrightarrow\ (\sqrt[6]{2})^{24}<(\sqrt[8]{5})^{24}\ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ 2^4=16<5^3=125\ \text{(верно)}.$$

4. При $z=2$ имеем $\sqrt[6]{3}>\sqrt[8]{4}$, так как $3^4=81>4^3=64.$

В силу сделанного выше замечания, необходимости в проверке значений $z=3,4,5,6$ нет. Эти числа решениями не являются.

Ответ: $-1,0,1.$

Использование ограниченности

Пример 104. **(МГУ, 1996).** *Найти все целочисленные решения неравенства*

$$\sqrt{x^3-5x-3}\le 6-x.$$

Решение. Целые решения будем искать из двух ограничений системы

$$\begin{cases} x^3-5x-3\ge 0, \\ 6-x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x^2-5)\ge 3, \\ x\le 6. \end{cases}$$

Первое неравенство выполняется при $x=3,4,5,6.$ Но из этих значений исходному неравенству удовлетворяет только $x=3$.

При $x=0,1,2$ первое неравенство не выполняется.

При $x=-1$ выполняется как первое неравенство, так и исходное неравенство.

При $x=-2$ первое неравенство не выполняется.

При остальных значениях $x=-3,-4,...$ первое неравенство не разрешимо, так как левая часть неравенства $x(x^2-5)\ge 3$ будет отрицательной.

***Ответ*: -1; 3.**

Метод интервалов

Пример 105. (МГУ, 1972). *Определить, сколько целочисленных решений имеет неравенство*

$$(n^2-2)(n^2-22)(n^2-52)(n^2-152)<0$$

Решение. Методом интервалов по n^2 определяем решения (см. рис. 2):

$$2<n^2<22 \text{ или } 52<n^2<152.$$

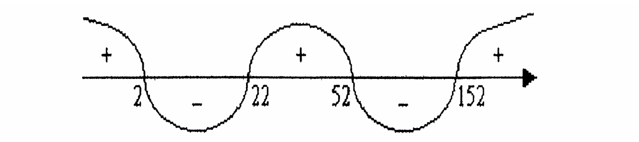


Рис. 2

Дальше подбором находим $n=\pm 2,\pm 3;\pm 4$ или $n=\pm 8,\pm 9;\pm 10;\pm 11;\pm 12.$

***Ответ*: 16 решений.**

Функционально-графический метод

Пример 106. (МГУ, 1997). *Найти все пары натуральных чисел* $(t;u)$, *удовлетворяющие одновременно двум неравенствам*

$$\begin{cases} 2t+47<22u-2u^2, \\ 4u\ge 7t+14. \end{cases}$$

Решение. Решим оба неравенства относительно t:

$$\begin{cases} t<-u^2+11u-\dfrac{47}{2}, \\ t\le \dfrac{4}{7}u-2. \end{cases}$$

Для решения задачи необходимо найти все точки плоскости uOt, обе координаты которых натуральные числа, расположенные под прямой (и возможно на ней) $t=\dfrac{4}{7}u-2$ и под параболой $t<-u^2+11u-\dfrac{47}{2}$ (см. рис. 3).

Если $u\le 5$, то $t\le \dfrac{4}{7}u-2\le \dfrac{20}{7}-2=\dfrac{6}{7}<1$, т.е. нужных нам точек $(t;u)$, при $u\le 5$ нет.

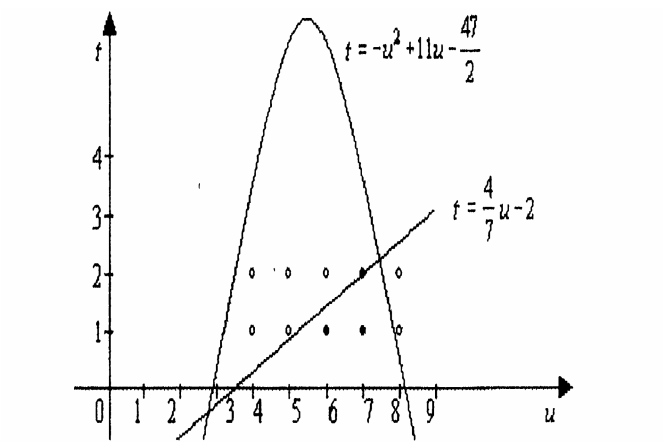


Рис. 3

Если $u=8$, то из первого неравенства системы получаем, что

$$t<-64+11\cdot 8-\frac{47}{2}=\frac{1}{2}.$$

Если же $u\ge 9$, то первое неравенство дает $t<0$, поэтому точек $(t;u)$, при $u\ge 9$ тоже нет.

Если $u=6$, то система принимает вид

$$\begin{cases} t<-36+66-\dfrac{47}{2}=6\dfrac{1}{2}, \\ t\le \dfrac{4}{7}\cdot 6-2=1\dfrac{3}{7}. \end{cases}$$

Значит, $t=1$.

Если $u=7$, то система принимает вид

$$\begin{cases} t < -49 + 77 - \dfrac{47}{2} = 4\dfrac{1}{2}, \\ t \le \dfrac{4}{7} \cdot 7 - 2 = 2, \end{cases}$$

т.е. $t = 1$ или $t = 2$.

***Ответ*:** $(1;6);(1;7);(2;7)$.

7.4. Уравнения и неравенства

Уравнение с одной неизвестной

Пример 107. *Может ли квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ с целыми коэффициентами иметь дискриминант, равный* 23?

Первое решение. Рассмотрим уравнение

$$b^2 - 4ac = 23.$$

Так как 23 – нечетное число, а $4ac$ – четное, то b^2 и, следовательно, b – нечетное число, т.е. $b = 2k - 1$, $k \in \mathbf{Z}$. Тогда $(2k-1)^2 - 4ac = 23$; $4(k^2 - k - ac) = 22$. Последнее уравнение не имеет решений, так как 22 не делится на 4.

Второе решение. Перепишем уравнение $b^2 - 4ac = 23$ в виде $b^2 - 25 = 4ac - 2$ и разложим обе части уравнения на множители:

$$(b-5)(b+5) = 2(2ac-1). \quad (*)$$

Так как в правой части уравнения – число четное, то и в левой – тоже четное, следовательно, $b-5$ и $b+5$ одновременно четные (докажите), т.е. $b - 5 = 2m$, $b - 5 = 2k$. Левая часть уравнения $(*)$ делится на 4, а правая – нет, поэтому уравнение $b^2 - 4ac = 23$ не имеет решений в целых числах.

Третье решение. Перепишем уравнение $b^2 - 4ac = 23$ в виде $b^2 = 4ac + 23$ или $b^2 = 4(ac+5) + 3$. Получили, что квадрат натурального числа при делении на 4 дает остаток 3, что невозможно (докажите).

***Ответ*:** не может.

Уравнения первой степени с двумя неизвестными

Пример 108. (МИОО 2010). *Найти все целые решения уравнения $113x + 179y = 17$, удовлетворяющие неравенствам $x > 0,\ y + 100 > 0$.*

Решение. Воспользуемся методом, сходным с алгоритмом Евклида. Имеем $179 = 113 + 66$. Перепишем уравнение в виде

$$113(x+y) + 66y = 17.$$

Обозначим $x + y = u$, $113u + 66y = 17$. Можно вновь 113 разделить на 66 с остатком, а лучше так: $113 = 2 \cdot 66 - 19$. Получаем

$$66(2u + y) - 19u = 17.$$

Обозначим $2u + y = \upsilon$, $66\upsilon - 19u = 17$, $66 = 3 \cdot 19 + 9$. Получаем уравнение

$$19(3\upsilon - u) + 9\upsilon = 17,$$
$$3\upsilon - u = \omega;$$
$$19\omega + 9\upsilon = 17,$$
$$9(2\omega + \upsilon) + \omega = 17,$$
$$2\omega + \upsilon = t.$$

Наконец, получаем уравнение $9t + \omega = 17$. Это уравнение имеет решение: $\omega = 17 - 9t$, где t – любое целое число. Проделываем обратные действия:

$$\upsilon = t - 2\omega = t - 34 + 18t = 19t - 34,$$
$$u = 3\upsilon - \omega = 66t - 119,$$
$$y = \upsilon - 2u = -113t + 204,$$
$$x = u - y = 179t - 323.$$

Таким образом, $x = 179t - 323$, $y = -113t + 204$, где t – любое целое число.

Из условия $x > 0,\ y > -100$, т.е. из системы

$$\begin{cases} 179t - 323 > 0, \\ -113t + 204 > -100 \end{cases}$$

найдем $t = 2$, затем $x = 35$; $y = -22$.

Ответ: $x = 35$; $y = -22$.

Уравнения второй степени с двумя неизвестными

Пример 109. (Московская математическая регата, 2005/2006, 11 класс). *Найти все целые решения уравнения:* $x^2 - 2xy + 2x - y + 1 = 0.$

Первое решение. Преобразуем данное уравнение, выразив переменную y через переменную x:

$$y(2x+1) = x^2 + 2x + 1;$$

$$y = \frac{x^2}{2x+1} + 1,$$

так как $2x+1 \neq 0$ при любых целых значениях x. Для того, чтобы y было целым, необходимо и достаточно, чтобы дробь $\frac{x^2}{2x+1}$ принимала целые значения.

Заметим, что

$$\text{НОД}(2x+1; x) = \text{НОД}(x+1; x) = 1,$$

поэтому числа x^2 и $2x+1$ – взаимно простые. Следовательно, выражение $\frac{x^2}{2x+1}$ принимает целые значения, если $2x+1 = \pm 1$. Таким образом, решения данного уравнения: $x = 0;\ y = 1$ и $x = -1;\ y = 0.$

Второе решение. Запишем данное уравнение как квадратное относительно переменной x: $x^2 - 2(y-1)x - (y-1) = 0.$ Его решения: $x = (y-1) \pm \sqrt{D'}$, где $D' = (y-1)^2 + (y-1) = (y-1)y.$

Для того чтобы x было целым, необходимо и достаточно, чтобы D' являлось квадратом целого числа. Это возможно только, если $D' = 0 \Leftrightarrow y = 1$ или $y = 0,$ так как в остальных случаях число $(y-1)y$ находится в интервале между двумя соседними квадратами: $(y-1)^2$ и y^2. Если $y = 1$, то $x = 0$; если $y = 0$, то $x = -1.$

Третье решение. Преобразуем данное уравнение, выделив квадрат трехчлена: $(x^2 + y^2 + 1 - 2xy + 2x - 2y) - y^2 + y = 0 \Leftrightarrow$ $(x - y + 1)^2 = (y-1)y.$ По доказанному выше $(y-1)y$ является квадратом целого числа тогда, и только тогда, когда $y = 0$ или $y = 1$. Если $y = 1$, то $x = 0$; если $y = 0$, то $x = -1.$

Ответ: $x = 0;\ y = 1$ или $x = -1;\ y = 0.$

Уравнения высшей степени

Теорема. Если $ab = d^2$, a, b и d – натуральные числа, и числа a и b взаимно просты, то a и b – точные квадраты.

Пример 110. (ММО, 2002, 9 класс). *Решить в целых числах уравнение* $m^4 - 2n^2 = 1.$

Решение. Если $(m; n)$ – решение данного уравнения, то $(-m; n)$, $(m; -n)$ и $(-m; -n)$ тоже решения. Поэтому будем искать только неотрицательные решения. Из записи $m^4 = 2n^2 + 1$ следует, что m – нечетное число, $m = 2t + 1$. Перепишем уравнение в виде

$$m^4 - 1 = (m-1)(m+1)(m^2+1) =$$
$$= 2t \cdot (2t+2) \cdot (4t^2 + 4t + 2) = 2n^2.$$

Отсюда $8t \cdot (t+1) \cdot (2t^2 + 2t + 1) = 2n^2$, т.е. n – четное число, $n = 2p$. Далее получаем уравнение $t \cdot (t+1) \cdot \big(2t(t+1) + 1\big) = p^2$. Нетрудно проверить, что числа t, $t+1$ и $2t(t+1)+1$ попарно взаимно просты.

Действительно, пусть, например, d делит $t+1$ и $2t(t+1)+1$, тогда d делит и $2t(t+1)$, а, значит, и разность $\big(2t(t+1)+1\big) - \big(2t(t+1)\big)$. Взаимная простота двух остальных пар доказывается аналогично.

Произведение этих взаимно простых чисел – полный квадрат. Согласно теореме каждое из них также является полным квадратом.

Итак, t и $t+1$ – полные квадраты. Это возможно только при $t = 0$. Действительно, если $t = \alpha^2$, $t + 1 = \beta^2$, где $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$, то $(\beta - \alpha)(\beta + \alpha) = 1$, поэтому $\beta - \alpha = 1, \beta + \alpha = 1$, так что $\alpha = 0$, следовательно, $t = 0$. Тогда и $p = 0$. Значит, $m = \pm 1;\ n = 0$.

Ответ: $m = \pm 1;\ n = 0$.

Дробно-рациональные уравнения

Пример 111. (МИОО 2010). *Найти все пары натуральных чисел разной четности, удовлетворяющие уравнению*

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{12}.$$

Решение. Пусть $m<n$. Приведем уравнение к виду

$$12m+12n=mn \Leftrightarrow$$
$$mn-12m-12n+12^2=12^2 \Leftrightarrow$$
$$(m-12)(n-12)=12^2,$$

причем числа $m-12$ и $n-12$ – разной четности.

В качестве возможного разложения $12^2=2^4\cdot 3^2=pq$, где p – нечетно, а q – четно, имеем следующие варианты:

1. $\begin{cases}p=1,\\ q=144\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m-12=1,\\ n-12=144\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m=13,\\ n=156.\end{cases}$

2. $\begin{cases}p=3,\\ q=48\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m-12=3,\\ n-12=48\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m=15,\\ n=60.\end{cases}$

3. $\begin{cases}p=9,\\ q=16\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m-12=9,\\ n-12=16\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m=15,\\ n=60.\end{cases}$

4. $\begin{cases}p<0,\\ q<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-12<m-12<0,\\ -12<n-12<0\end{cases} \Rightarrow$

$(m-12)(n-12)<12^2.$

Неизвестные m и n входят в уравнение симметрично. Поэтому получаем ответ.

Ответ: $(13;156)$; $(15;60)$; $(21;28)$, $(156;13)$; $(60;15)$; $(28;21)$.

Иррациональные уравнения

Пример 112. (Московская математическая регата, 2002/2003, 11 класс). *Найти все целые решения уравнения*

$$\sqrt{x+\sqrt{x}}=y-2002.$$

Решение. Исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases}x+\sqrt{x}=(y-2002)^2,\\ y\ge 2002.\end{cases}$$

По условию, x – целое число, поэтому $t=\sqrt{x}$ – также целое. Чтобы уравнение $t^2+t-(y-2002)^2=0$ имело целые решения, необходимо, чтобы дискриминант $D=1+4(y-2002)^2$ являлся полным квадратом. Так как второе слагаемое, в свою очередь, при всех целых значениях y является полным квадратом, то следующее за ним натуральное число является квадратом тогда и только тогда, когда $(y-2002)^2=0 \Leftrightarrow y=2002$. Откуда $t=0$ или $t=-1$, то есть, $x=0$.

Ответ: $x=0$; $y=2002$.

Показательные уравнения

Теорема. Если остаток от деления a_1 на b равен r_1, а остаток от деления a_2 на b равен r_2, то остаток от деления a_1+a_2 на b равен остатку от деления r_1+r_2 на b.

Опорная задача. Докажите, что остаток от деления на 3 числа 5^k равен 1, если k четно, и 2, если k нечетно.

Пример 113. (ММО, 1998, 11 класс). *Решить в натуральных числах уравнение*

$$3^m+4^n=5^k.$$

Решение. Правая часть уравнения при делении на 3 должна давать тот же остаток, что и левая, т.е. 1 (см. теорему). Поэтому k четное число (см. опорную задачу). Аналогично, левая часть уравнения делится на 4 с остатком 1, поэтому число m тоже четное. Итак,

$$4^n=5^k-3^m=5^{2k_0}-3^{2m_0},$$

т.е.

$$2^{2n}=(5^{k_0}-3^{m_0})(5^{k_0}+3^{m_0}).$$

Поэтому $5^{k_0}-3^{m_0}=2^p$ и $5^{k_0}+3^{m_0}=2^q$, где p и q – целые неотрицательные числа $p+q=2n$. Таким образом,

$$5^{k_0}=\frac{1}{2}(2^p+2^q)$$

и

$$3^{m_0}=\frac{1}{2}(2^q-2^p)=2^{q-1}-2^{p-1}.$$

Значит, число $2^{q-1}-2^{p-1}$ нечетно, поэтому $p=1$. Значит, $2^p=2$ и $3^{m_0}=2^{q-1}-1$. Следовательно, число $q-1$ четно, $q-1=2s$ (иначе левая часть не делится на 3). Тогда $3^{m_0}=(2^s-1)(2^s+1)$ – произведение двух множителей, отличающихся на 2 и являющиеся степенями тройки. Эти множители равны 1 и 3. Тогда $s=1$, $l=2s+1=3$. Теперь получаем $m=n=k=2$.

Ответ: $m=n=k=2$.

Уравнения смешанного типа

Пример 114. (МГУ, 1979). *Найти все целые корни уравнения*

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\left(3x-\sqrt{9x^2+160x+800}\right)\right)=1.$$

Решение. Из данного уравнения получаем

$$\frac{\pi}{8}\left(3x-\sqrt{9x^2+160x+800}\right)=2\pi n,\ \ n\in\mathbf{Z}.$$

Отсюда приходим к иррациональному уравнению

$$\sqrt{9x^2+160x+800}=3x-16n,$$

которое равносильно системе

$$\begin{cases}9x^2+160x+800=(3x-16n)^2,\\ 3x-16n\ge 0;\ x,n\in\mathbf{Z}.\end{cases}$$

Уравнение системы приведем к виду

$$x(3n+5)=8n^2-25.\ (*)$$

Так как $8n^2-25=8\left(n^2-\dfrac{25}{9}\right)-\dfrac{25}{9}=$

$=\dfrac{8}{9}(3n+5)(3n-5)-\dfrac{25}{9}$, то уравнение $(*)$ имеет вид

$$8(3n+5)(3n-5)-9x(3n+5)=25$$

или

$$(3n+5)(8(3n-5)-9x)=25.$$

Последнее равенство означает, что $3n+5$ является делителем числа 25, т.е. $3n+5$ есть одно из чисел $\pm1,\pm5,\pm25$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что это возможно только если n равняется одному из чисел $n_1=-10$, $n_2=-2$, $n_3=0$. Соответствующие значения x находятся из равенства $(*)$: $x_1=-31$, $x_2=-7$, $x_3=-5$. Условию $3x-16n\ge 0$ удовлетворяют значения $n_1=-10$, $x_1=-31$ и $x_2=-7$, $n_2=-2$.

Ответ: $x_1=-31$, $x_2=-7$.

Уравнения, содержащие знак факториала

Пример 115. (МИОО, 2011). *Решить в натуральных числах уравнение*

$$2\cdot k!=m!-2\cdot n!.$$

Решение. Запишем уравнение в следующем виде

$$2(k!+n!)=m!.\ (*)$$

Отсюда следует, что $k\le n<m$ или $n\le k<m$.

Если $k=n$, то получаем $4\cdot k!=m!$. Отсюда после деления обеих частей равенства на $k!$ получаем

$$4=(k+1)\cdot\ldots\cdot m.$$

Следовательно, 4 делится на $k+1$. Так как $k-$ натуральное число, то возможны два случая $k+1=2$ или $k+1=4$.

В первом случае получаем $k=1$, тогда $m=2$. Но это невозможно, так как подставляя в исходное уравнение получим $2\cdot1!=2!-2\cdot1!$, что неверно.

Во втором случае $k=3$, тогда $m=4$. Значит, тройка чисел (3; 3; 3) – решение исходного уравнения.

Рассмотрим теперь случай, когда $k>n$. Тогда вынося в левой части уравнения $(*)$ $n!$, получим и

$$2\cdot n!\cdot((n+1)\cdot\ldots\cdot k+1)=m!$$

или

$$2\cdot((n+1)\cdot\ldots\cdot k+1)=(n+1)\cdot\ldots\cdot m\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\cdot(n+1)\cdot\ldots\cdot k+2=(n+1)\cdot\ldots\cdot m.$$

Правая часть последнего равенства делится на $n+1$ и k (так как $n<k<m$). В левой части одно слагаемое делится на $n+1$ и k. Чтобы сумма в левой части делилась на $n+1$ и k необходимо, чтобы число 2 делилось $n+1$ и k. Это возможно, если

$n+1=k=2$. Тогда из уравнения (*) получаем $m=3$. Значит, тройка чисел $(1;\,2;\,3)$ – решение исходного уравнения..

Аналогично в случае $n>k$ получим еще одно решение $(2;\,1;\,3)$.

Ответ: $(1;\,2;\,3)$, $(2;\,1;\,3)$, $(2;\,1;\,3)$.

Пример 116. (МИОО, 2011). *Решить в натуральных числах уравнение*

$$n^{k+1}-n!=5(30k+11).$$

Решение. Так как левую часть равенства можно разложить на множители $n^{k+1}-n!=n(n^k-(n-1)!)$, то правая часть должна делиться на n. Случай $n=1$ не удовлетворяет условию задачи.

Так как $5(30k+11)$ не имеет простых делителей меньших, чем 5, то $n\ge 5$.

Пусть $n>5$. В этом случае можем представить число n, как $n=5m$, где $m>1$. Тогда равенство примет вид

$$5^k\cdot m^{k+1}-4!\cdot 6\cdot 7\cdot\ldots\cdot 5m=30k+11.$$

Левая часть этого равенства делится на 5, а правая нет. Значит таких n нет.

Пусть $n=5$. В этом случае равенство примет вид

$$5^{k+1}-5!=5(30k+11).$$

Отсюда получаем $5^{k-1}=6k+7$. При $k=1$ и $k=2$ равенство невозможно. При $k=3$ обе части равны 25. Покажем, что других решений последнее уравнение не имеет. Для этого рассмотрим последовательность $a_k=5^{k-1}-6k-7$ и запишем разность

$$a_{k+1}-a_k=5^k-6(k+1)-7-5^{k-1}+6k+7=$$
$$=5^{k-1}\cdot 4-6.$$

Очевидно, что при $k\ge 2$ эта разность положительна. Следовательно, при $k>3$ получим $a_k>a_3=0$.

Ответ: $n=5$, $k=3$.

Уравнения с простыми числами

Пример 117. *Решить в простых числах уравнение* $x^y+1=z$.

Решение. Число z больше 2, так как если $z=2$, то $x=1$, а это не возможно. Тогда z нечетно, а следовательно, число x четно. Но x – простое, поэтому $x=2$. Получаем уравнение: $2^y+1=z$.

Если y нечетно, то сумма 2^y+1 делится на 3, причем частное от такого деления больше 1; но в этом случае z составное. Значит, число y четное, т.е. $y=2$. Находим $z=5$.

Ответ: $x=2$, $y=2$, $z=5$.

Неразрешимость уравнений

Пример 118. *Доказать, что уравнение* $x!+y!=10z+9$ *не имеет решений в натуральных числах.*

Решение. Так как правая часть уравнения – нечетное число, то и левая часть должна быть нечетным числом. Поэтому или x, или y меньше 2. Пусть для определенности, $x=1$, т.е. $y!=10z+8$. Правая часть последнего равенства не делится на 5, а потому $y\le 4$, но ни одно из натуральных чисел, которые удовлетворяют этому неравенству, не служат решением данного уравнения. Итак, данное равнение не имеет решений в натуральных числах.

Замечание. Один из способов доказательства неразрешимости уравнения рассмотрен в разделе «Метод от противного».

Текстовые задачи

Пример 119. (МИОО 2010). *Группу школьников нужно перевезти из летнего лагеря одним из двух способов: либо двумя автобусами типа А за несколько рейсов, либо тремя автобусами типа В за несколько рейсов, причём в этом случае число рейсов каждого автобуса типа В будет на один меньше, чем рейсов каждого автобуса типа А. В каждом из случаев автобусы заполняются полностью. Какое максимальное количество школьников можно перевезти при указанных условиях, если в автобус типа В входит на* 7 *человек меньше, чем в автобус типа* A?

Решение. Пусть в автобус типа B входит k человек, а в автобус типа A входит $k+7$ человек, и пусть каждый из трех автобусов типа B сделает по m рейсов, а каждый из двух автобусов типа A по $m+1$. Так как в обоих случаях автобусы перевезут одно и то же количество детей, получаем уравнение:

$$3km = 2(k+7)(m+1);$$
$$km = 14m + 2k + 14;$$
$$m(k-14) = 2k + 14.$$

При $k > 14$ получаем:

$$m = \frac{2k+14}{k-14} \text{ или } m = 2 + \frac{42}{k-14}.$$

Число $k-14$ – это один из восьми делителей числа 42. Перебирая их по очереди, мы получим все возможные решения (8 пар чисел k и m). Вот они: (15; 44), (16; 23), (17; 16), (20; 9), (21; 8), (28; 5), (35; 4), (56; 3).

Для каждой пары последовательно находим количества перевозимых детей, равные $3km$: 1980, 1104, 816, 540, 504, 420, 420 и 504. Из них выбираем наибольшее.

Ответ: 1980 детей перевозятся тремя автобусами типа *B* (по 15 человек) за 44 рейса или двумя автобусами типа *A* (по 22 человека) за 45 рейсов.

Уравнения, содержащие функцию «целая часть числа» $[x]$

● Целой частью числа x называется наибольшее целое число, не превосходящее x.

● Свойства целой части числа:

1) Из равенства $[y] = n$ следует, что
   а) n – целое число;
   б) $y = n + \alpha$, где $0 \le \alpha < 1$;
   в) $0 \le y - n < 1$.
2) Если $[u] = [v]$, то $u = m + \alpha$, $v = m + \beta$, где $0 \le \alpha < 1$ и $0 \le \beta < 1$, поэтому $u - v = \alpha - \beta$ и $-1 < u - v < 1$.
3) Если $[x + y] = x$, то x – целое число и $0 \le y < 1$.
4) Если n – целое число, то
$$[n + x] = n + [x].$$

Пример 120. *Решить уравнение*

$$\left[\frac{8x+19}{7}\right] = \frac{16(x+1)}{11}.$$

Решение. Корень уравнения должен удовлетворять неравенствам

$$0 \le \frac{8x+19}{7} - \frac{16(x+1)}{11} < 1, \text{ т.е. } \frac{5}{6} < x \le 4\frac{1}{24}.$$
$$(*)$$

Положим $\frac{16(x+1)}{11} = t$, где t – целое число. Отсюда $x = \frac{11t-16}{16}$. (**)

Подставив это выражение x в данное уравнение, получим:

$$\left[\frac{11t+22}{14}\right] = t.$$

По определению целой части числа $0 \le \frac{11t+22}{14} - t < 1$. Отсюда $2\frac{2}{3} < t \le 7\frac{1}{3}$. Следовательно, неизвестное t может принимать лишь следующие целые значения: 3, 4, 5, 6, 7. Подставляя последовательно каждое из этих значений t в уравнение (**), найдем, что при условии (*) исходное уравнение имеет лишь пять корней.

Ответ: $1\frac{1}{16}$; $1\frac{3}{4}$; $2\frac{7}{16}$; $3\frac{1}{8}$; $3\frac{13}{16}$.

Неравенства

Пример 121. (МИОО 2010). *Найти все пары* $(x; y)$ *целых чисел, удовлетворяющие системе неравенств*:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 < 18x - 20y - 166, \\ 32x - y^2 > x^2 + 12y + 271. \end{cases}$$

Решение. Выделяя полные квадраты, получаем:

$$\begin{cases} (x-9)^2 + (y+10)^2 < 15, \\ (x-16)^2 + (y+6)^2 < 21, \\ x, y \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Из первого и второго неравенства системы:

$$\begin{cases} (x-9)^2 < 15 \\ (x-16)^2 < 21; \end{cases} \begin{cases} 6 \le x \le 12 \\ 12 \le x \le 20; \end{cases} x = 12.$$

Подставляя $x = 12$ в систему, получаем:

$$\begin{cases} (y+10)^2 < 6, \\ (y+6)^2 < 5, \\ y \in \mathbf{Z}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \le y + 10 \le 2, \\ -2 \le y + 6 \le 2, \\ y \in \mathbf{Z}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -12 \le y \le -8, \\ -8 \le y \le -4, \\ y \in \mathbf{Z}. \end{cases} \quad \text{Отсюда } y = -8.$$

Ответ: $(12; -8)$.

Задачи с параметрами

Пример 122. (МГУ, 1992). *Найти все значения параметра* p, *при каждом из которых число целочисленных решений неравенства* $x^2 + 5(x+1) + 3|x - p| + p \le 0$ *максимально.*

Решение. Найдем графическое решение данного неравенства. Рассмотрим два случая.

1. Пусть $x - p \ge 0$, т.е. $p \le x$, тогда имеем $x^2 + 5x + 5 + 3x - 3p + p \le 0$ или $p \ge \frac{1}{2}(x^2 + 8x + 5)$.

Системе $\begin{cases} p \le x \\ p \ge 0{,}5(x^2 + 8x + 5) \end{cases}$ удовлетворяют координаты точек, расположенных не выше прямой $p = x$ и не ниже параболы $p = 0{,}5(x^2 + 8x + 5)$ с вершиной $(-4; -5{,}5)$.

2. Пусть $x - p \le 0$, т.е. $p \ge x$, тогда имеем $x^2 + 5x + 5 - 3x + 3p + p \le 0$ или $p \le -\frac{1}{4}(x^2 + 2x + 5)$.

Системе $\begin{cases} p \ge x \\ p \le -0{,}25(x^2 + 8x + 5) \end{cases}$ удовлетворяют координаты точек, расположенных не ниже прямой $p = x$ и не выше параболы $p = -0{,}25(x^2 + 2x + 5)$ с вершиной $(-1; -1)$ (см. рис. 4).

3. Найдем координаты точек пересечения двух парабол и каждой из парабол с прямой $p = x$.

а) $\begin{cases} p = x, \\ p = 0{,}5(x^2 + 8x + 5) \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -1, \\ p = -1, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -5, \\ p = -5 \end{cases} \end{array}\right.$

б) $\begin{cases} p = x, \\ p = -0{,}25(x^2 + 2x + 5) \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -1, \\ p = -1, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -5, \\ p = -5 \end{cases} \end{array}\right.$.

в) $\begin{cases} p = -0{,}25(x^2 + 2x + 5), \\ p = 0{,}5(x^2 + 8x + 5) \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -1, \\ p = -1, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -5, \\ p = -5. \end{cases} \end{array}\right.$

Таким образом, область решений данного неравенства задается условиями:

$-5 \le x \le -1$;

$0{,}5(x^2 + 8x + 5) \le p \le -0{,}25(x^2 + 2x + 5)$. (*)

4. В данном множестве решений имеются точки с целочисленной координатой $x = -5$, $x = -4$, $x = -3$, $x = -2$, $x = -1$.

Подставим $x = -5$ в неравенство (*), получим $p = -5$.

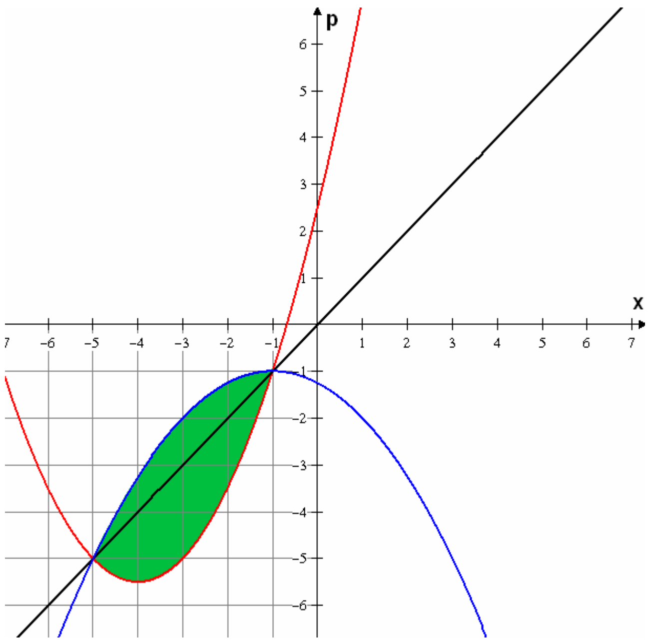


Рис. 4

Подставим $x = -4$ в неравенство (*), получим $-5{,}5 \le p \le -3{,}25$.

Подставим $x = -3$ в неравенство (*), получим $-5 \le p \le -2$.

Подставим $x = -2$ в неравенство (*), получим $-1{,}5 \le p \le -1{,}25$.

Подставим $x = -1$ в неравенство (*), получим $p = -1$.

5. Каким может быть максимальное число целых решений? От одного до пяти.

Если считать, что их пять, тогда система пяти полученных условий должна быть совместна. Но она не имеет решений.

Если считать, что их четыре последовательных числа, то, решая систему из первых четырех условий и систему следующих четырех условий, получаем, что они не совместны.

Пусть имеется три последовательных целых решений, тогда решаем системы из трех последовательных условий:

а) $\begin{cases} p=-5 \\ -5{,}5 \le p \le -3{,}25 \\ -5 \le p \le -2 \end{cases} \Leftrightarrow \ p=-5$;

б) $\begin{cases} -5{,}5 \le p \le -3{,}25 \\ -5 \le p \le -2 \\ -3{,}5 \le p \le -1{,}25 \end{cases} \Leftrightarrow \ -3{,}5 \le p \le -3{,}25$;

в) $\begin{cases} -5 \le p \le -2 \\ -3{,}5 \le p \le -1{,}25 \\ p=-1 \end{cases}$ нет решений.

Ответ: $\{-5\} \cup [-3{,}5; -3{,}25]$.

Упражнения

1. Докажите, что число a является составным:

1) $a = 6^n + 3^n + 2^{n+1} + 2$ при любом натуральном n;

2) $a = 25n^4 + 9n^2 + 1$ при любом натуральном n;

3) $n^4 + 4$ при любом натуральном $n > 1$.

2. Докажите, что:

1) число $16^{20} + 2^{76}$ делится на 17;

2) число $555^{777} + 777^{555}$ делится на 37.

3. Докажите, что:

1) $n^3 - n$ делится на 3;

2) $n^3 - 5n$ делится на 3;

3) $n^5 - n$ делится на 5;

4) $n^4 + 6n^3 + 11n^3 + 6n$ делится на 4.

4. Докажите, что:

1) не существует простого числа, которое можно представить в виде суммы нескольких последовательных положительных нечетных чисел;

2) если к произведению четырех последовательных натуральных чисел прибавить единицу, то получится число, равное квадрату некоторого натурального числа.

5. Докажите, что:

1) число $16^{20} + 2^{76}$ делится на 17;

2) число $16^3 + 31^4 - 2$ делится на 15.

6. Найдите наибольший общий делитель чисел:

1) 6787 и 7194; 2) 2691 и 40572;

3) $10^m - 1$ и $10^n - 1$.

7. Найдите наименьшее общее кратное чисел:

1) 420, 312 и 333333;

2) 1403, 1058 и 3266.

8. Найдите наибольший общий делитель d чисел a и b и представить его в виде $d = ax + by$, где x и y – целые:

1) 21 и 17; 2) 321 и 843;

3) 23520 и 77222.

9. Найдите натуральные числа a и b, если $(a, b) = 6$, $[a, b] = 90$.

10. Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима $(a, b \in \mathbf{N})$.

1) Докажите, что дробь $\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$ также несократима.

2) На какие числа может сокращаться дробь: а) $\frac{3a+2b}{a+4b}$; б) $\frac{a+b}{a^2-ab+b^2}$.

11. Докажите, что несократима дробь:

1) $\frac{2a^2-1}{2a+1}$ при всех $a \in \mathbf{Z}$;

2) $\frac{a^2+a-1}{a^2+2a}$ при всех $a \in \mathbf{Z}$.

12. Найдите все целые n, при которых дробь $a = \frac{n^4+3n^2+7}{n^2+1}$ будет целым числом.

13. Найдите натуральные числа, которые делятся на 3 и 4 и имеют ровно 21 натуральный делитель.

14. Найдите наименьшее натуральное число, имеющее 18 натуральных делителей.

15. Некоторое натуральное число имеет два простых делителя. Его квадрат имеет всего 15 делителей. Сколько делителей имеет куб этого числа?

16. Некоторое натуральное число имеет два простых делителя. Его квадрат имеет 81 делитель. Сколько делителей имеет куб этого числа?

17. У натурального числа n ровно 6 делителей. Сумма этих делителей равна 3500. Найдите n.

18. Произведение всех натуральных делителей числа N оканчивается 399 нулями. На сколько нулей может оканчиваться число N?

19. Найти остаток от деления числа a на m, если:

1) $a = 14^{256}$, $m = 17$; 2) $a = 6^{592}$, $m = 11$.

20. Докажите, что число $2222^{5555} + 5555^{2222}$ делится на 7.

21. Докажите следующие признаки делимости на число.

1) Натуральное число a делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма его цифр $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ делится на 9.

2) Пусть натуральное число $a = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0} = 1000A + B$, где $A = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_3}$, $B = \overline{a_2 a_1 a_0}$. Число a делится на 7 (или на 11, или на 13) тогда и только тогда, когда $A \equiv B \pmod 7$ (соответственно $\bmod 11$ или $\bmod 13$).

22. Докажите, что a не может быть четвертой степенью натурального числа, если $a-5$ делится на 9.

23. Докажите, что числа следующего вида не могут быть квадратами целых чисел:

1) $12n+5$, где $n \in \mathbf{N}$;

2) $7n+3$, где $n \in \mathbf{N}$.

24. Найти наименьшее натуральное число, большее 1 и дающее при делении на 2, 3, 4, 5, 6 остаток 1, равный 1.

25. Докажите, что

1) квадрат простого числа, большего 2, дает остаток 1 при делении на 12;

2) квадрат простого числа, большего 5, при делении на 30 дает в остатке 1 или 19.

26. Докажите, что число $n^7 - n$ делится на 42 при любом $n \in \mathbf{N}$.

27. Является ли полным квадратом число

$$a = \underbrace{11\ldots1}_{2n\ цифр} - \underbrace{22\ldots2}_{n\ цифр}\ ?$$

28. Найти сумму

$$a = 7 + 77 + 777 + \ldots + \underbrace{7\ldots7}_{n\ цифр}.$$

29. Извлечь корень

$$\sqrt{\underbrace{44\ldots4}_{2n\ цифр} + \underbrace{11\ldots1}_{n+1\ цифра} - \underbrace{66\ldots6}_{n\ цифр}}.$$

30. Докажите, что число $n^7 - n$ делится на 42 при любом $n \in \mathbf{N}$.

31. (ММР, 8 класс, 1999/2000 учебный год). Запишите наибольшее десятизначное число, кратное семи, все цифры в десятичной записи которого различны.

32. (ММР, 8 класс, 2000/2001 учебный год). Найдите все целые a и b такие, что $a^4 + 4b^4$ является простым числом.

33. (ММР, 8 класс, 2001/2002 учебный год). Сравните числа $99!$ и 50^{99}.

34. (ММР, 8 класс, 2002/2003 учебный год). Является ли простым или составным число $4^9 + 6^{10} + 3^{20}$?

35. (ММР, 9 класс, 1999/2000 учебный год). Назовем натуральное число «замечательным», если оно – самое маленькое среди всех натуральных с такой же, как у него, суммой цифр. Сколько существует трехзначных «замечательных» чисел?

36. (ММР, 9 класс, 2003/2004 учебный год). Сколько существует не равных между собой треугольников, длины сторон которых – натуральные числа, а периметр равен 20?

37. (ММР, 10 класс, 1998/1999 учебный год). Первые 1511 натуральных чисел расставлены по порядку вдоль окружности. Затем, последовательно вычеркивается каждое второе число (2; 4; …; 1510; …). Этот процесс продолжается до тех пор, пока не останется только одно число. Какое это число?

38. (ММР, 10 класс, 1998/1999 учебный год). Каким наибольшим количеством нулей может оканчиваться десятичная запись числа $x = 1^n + 2^n + 3^n + 4^n$, где n - натуральное число?

39. (ММР, 10 класс, 1999/2000 учебный год). Какое наибольшее количество натуральных чисел, меньших пятидесяти, можно выбрать так, чтобы любые два из них были взаимно простыми?

40. (ММР, 10 класс, 2000/2001 учебный год). Пусть $S(x)$ – сумма цифр натурального числа x. Решите уравнение: $x + S(x) = 2001$.

41. (ММР, 10 класс, 2001/2002 учебный год). Найдите две последние цифры в десятичной записи числа:

$$1!+2!+\ldots+2010!+2011!.$$

42. (ММР, 10 класс, 2003/2004 учебный год). Найдите все натуральные значения n, при которых $n^5 + 2$ делится на $n + 2$.

43. (ММР, 10 класс, 2004/2005 учебный год). Пятизначное число назовем «неразложимым», если оно не раскладывается в произведение двух трехзначных чисел. Какое наибольшее количество таких чисел может идти подряд?

44. (ММР, 10 класс, 2005/2006 учебный год). Натуральное число называется упрощенным, если оно является произведением ровно двух простых чисел (не обязательно различных). Какое наибольшее количество последовательных натуральных чисел может оказаться упрощенными?

45. (ММР, 11 класс, 1999/2000 учебный год). В школьной олимпиаде по математике участвовало 100 человек, по физике – 50 человек, по информатике – 48 человек. Когда каждого из учеников спросили, в скольких олимпиадах он участвовал, ответ «по крайней мере в двух» дали в два раза меньше человек, чем ответ «не менее, чем в одной», а ответ «в трех» - втрое меньше человек, чем ответ «не менее, чем в одной». Сколько всего учеников приняло участие в этих олимпиадах?

46. (ММР, 10 класс, 1997/1998 учебный год). На какую наибольшую степень числа 2 может делиться выражение $n^2 + 4n - 33$ при целых значениях n?

47. Назовем автобусный билет несчастливым, если сумма цифр его шестизначного номера делится на 13. Могут ли два идущих подряд билета оказаться несчастливыми?

48. Найдите все такие целые *a* и *b*, для которых один из корней уравнения

$$3x^3 + ax^2 + bx + 12 = 0$$

равен $1+\sqrt{3}$.

49. Найдите рациональные *p* и *q*, если один из корней уравнения $x^2 + px + q = 0$ равен $1+\sqrt{3}$.

50. (МИОО, 2010). Каждый из двух различных корней квадратного трехчлена $f(x) = x^2 + (3a+10)x + 5b - 14$ и его значение при $x = 1$ являются простыми числами. Найдите *a*, *b* и корни трехчлена $f(x)$.

51. (МИОО, 2010). Квадратный трехчлен $f(x) = x^2 + px + q$ имеет два различных целых корня. Один из корней трехчлена и его значение в точке $x = 11$ являются простыми числами. Найдите корни трехчлена.

52. (МИОО, 2010). Найдите все такие целые *a* и *b*, что корни уравнения $x^2 + (2a+9)x + 3b + 5 = 0$ являются различными целыми числами, а коэффициенты $2a+9$ и $3b+5$ – простыми числами.

53. Решите уравнение $3x-4y=1$ в целых числах.

54. (МГУ, 2007). Найдите все целочисленные решения уравнения

$$x^2-14x+4y^2+32y+88=0.$$

55. Решите уравнение $xy-y^2=x$ в целых числах.

56. (МФТИ, 2004). Найдите все пары целых чисел x и y, удовлетворяющие уравнению

$$-3xy-10x+13y+35=0.$$

57. Решите в целых числах уравнение

$$5x^2+5y^2+8xy+2y-2x+2=0.$$

58. Решите в целых числах уравнение

$$x^2-6xy+13y^2=100.$$

59. Уравнение $2xy=x^2+2y$ решите в натуральных числах.

60. Найдите все пары целых чисел, сумма которых равна их произведению.

61. Решите уравнение $xy+x-y=2$ в целых числах.

62. (ММО, 1941, 9-10 классы). Решите в целых числах уравнение

$$x+y=x^2-xy+y^2.$$

63. Решите в натуральных числах систему уравнений $\begin{cases} x+y+z=14 \\ x+yz=19 \end{cases}$

64. (МИОО, 2010). Решите в целых числах уравнение $2x^2-2xy+9x+y=2$.

65. (МИОО, 2010). Найдите все целые решения уравнения $3x^2+4xy-7y^2=13$.

66. (ММО, 1964, 7 класс). При каких натуральных числах a существуют такие натуральные числа x и y, что $x^2+y^2=axy$?

67. (ММО, 1983, 7 класс). Найдите все пары целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющих уравнению $x^2=y^2+2y+13$.

68. Решите в целых положительных числах уравнение

$$2x^2-xy-y^2+2x+7y=84.$$

69. Уравнение $x^3-3y^3-9z^3=0$ решите в целых числах.

70. Решите в целых числах уравнение $4x^3-2y^3-z^3=0.$

71. Решите в целых числах уравнение

$$3x^2+4xy-7y^2-13=0.$$

72. Решите в целых числах уравнение

$$2x^2y^2+y^2-6x^2-12=0.$$

73. Уравнение $x^3+91=y^3$ решите в целых числах.

74. Какие целые положительные числа могут удовлетворять уравнению

$$x+y+z=xyz?$$

75. Решите в целых числах уравнение

$$19x^3-84y^2=1984.$$

76. (МИОО, 2010). Найдите все решения в натуральных числах

$$x(y+1)^2=243y.$$

77. (МИОО, 2010). Решите в целых числах уравнение

$$m\cdot n^2=10^5n+m.$$

78. (МИОО, 2010). Найдите все натуральные числа x и y, для которых выполняется равенство

$$x^4+x^3+x^2+x+1=y^2.$$

79. (МИОО, 2010). Существуют ли рациональные числа x, y, u, v, которые удовлетворяют уравнению

$$\left(x+y\sqrt{2}\right)^6+\left(u+v\sqrt{2}\right)^6=7+5\sqrt{2}?$$

80. (ММО, 1972, 9 класс). Существуют ли рациональные числа a, b, c, d, которые удовлетворяют уравнению

$$\left(a+b\sqrt{2}\right)^{2n}+\left(c+d\sqrt{2}\right)^{2n}=5+4\sqrt{2}$$

(где n – натуральное число)?

81. (МИОО, 2010). Найдите наименьшее и наибольшее натуральные значения n, при которых уравнение

$$(x^2+y^2)^{2010}=x^ny^n$$

имеет натуральные решения.

82. (МИОО, 2010). Найдите наименьшее и наибольшее натуральные значения n, при которых уравнение

$$\frac{2012\ln(x^2+y^2)}{n}=\ln(xy)$$

имеет натуральные решения.

83. (ММО, 1958, 10 класс). Решите в целых положительных числах уравнение

$$x^{2y}+(x+1)^{2y}=(x+2)^{2y}.$$

84. (МГУ, 1989) Найдите все целые числа x и y, удовлетворяющие равенству

$$9x^2y^2+6xy^2-9x^2y+2x^2+y^2-$$
$$-18xy+7x-5y+6=0.$$

85. (МГУ, 1989). Найдите все целые числа x и y, удовлетворяющие равенству

$$15x^2y^2-8yx^2+28y^2x+x^2+5y^2-$$
$$-38xy+8x-24y+16=0.$$

86. (МГУ, 1979) Найдите все тройки целых чисел $(x;y;z)$, для каждой из которых выполняется соотношение

$$3(x-3)^2+6y^2+2z^2+3y^2z^2=33.$$

87. (МГУ, 1979) Найдите все тройки целых чисел $(x;y;z)$, для каждой из которых выполняется соотношение

$$5x^2+y^2+3z^2-2yz=30.$$

88. Решите в натуральных числах уравнение $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1.$

89. Решите в натуральных числах уравнение

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}.$$

90. (МИОО, 2010) Решите в натуральных числах уравнение

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{25},$$

где $m>n$.

91. Решите в целых числах уравнение

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{98}.$$

92. (МИОО, 2010). Найдите все пары натуральных чисел m и n, являющиеся решениями уравнения $2^m-3^n=1$.

93. (МИОО, 2010). Найдите все пары натуральных чисел m и n, являющиеся решениями уравнения $3^n-2^m=1$.

94. (МИОО, 2010). Решите в натуральных числах уравнение

$$2^x-15=y^2.$$

95. Решите в целых числах уравнение

$$2^x-1=y^2.$$

96. (МИОО, 2010). Решите в целых числах уравнение

$$3^n+8=x^2.$$

97. (МИОО, 2010). Решите в целых числах уравнение

$$1+2^k+2^{2k+1}=n^2.$$

98. (МИОО, 2010). Найдите все пары натуральных k и n таких, что $k<n$ и

$$\left(\frac{1}{n}\right)^k=\left(\frac{1}{k}\right)^n.$$

99. (МГУ, 1979) Найдите все целые корни уравнения

$$\cos\left(\frac{\pi}{10}\left(3x-\sqrt{9x^2+80x-40}\right)\right)=1.$$

100. (Московская математическая регата, 2003/2004, 11 класс). Найдите все натуральные значения n, для которых выполняется равенство: $n^3-n=n!$.

101. (МИОО, 2010) Решите в натуральных числах уравнение

$$n!+5n+13=k^2,$$

где $n!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n$ – произведение всех натуральных чисел от 1 до n.

102. Уравнение $x!+y!=(x+y)!$ решите в целых числах.

103. Уравнение $x^2-2y^2=1$ решите в простых числах.

104. (ВМО, 1992, 9 класс). Докажите, что уравнение $x^3+y^3=4(x^2y+xy^2+1)$ не имеет решений в целых числах.

105. (ММО, 1946, 8-9 классы). Докажите, что выражение

$$x^5+3x^4y-5x^3y^2-15x^2y^3+4xy^4+12y^5$$

не равно 33 ни при каких целых значениях x и y.

106. (ММО, 1949, 7-8 классы). Доказать, что равенство $x^2+y^2+z^2=2xyz$ для целых чисел x, y, z возможно только при $x=y=z=0$.

107. Существуют ли целые числа m и n, удовлетворяющие уравнению

$$m^2+2010=n^2\ ?$$

108. Докажите, что уравнение $x^2+1=3y$ не имеет решений в целых числах.

109. (МИОО 2010, 10 класс). Шарики можно разложить в пакетики, а пакетики упаковать в коробки, по 3 пакетика в одну коробку. Можно эти же шарики разложить в пакетики так, что в каждом пакетике будет на 3 шарика больше, чем раньше, но тогда в каждой коробке будет лежать по 2 пакетика, а коробок потребуется на 2 больше. Какое наибольшее количество шариков может быть при таких условиях?

110. (МИОО, 2010, 10 класс). Шарики можно разложить в пакетики, а пакетики упаковать в коробки, по 2 пакетика в одну коробку. Можно эти же шарики разложить в пакетики так, что в каждом пакетике будет на 5 шариков меньше, чем раньше, но тогда в каждой коробке будет лежать по 3 пакетика, а коробок потребуется на 2 меньше. Какое наибольшее количество шариков может быть при таких условиях?

111. (МГУ, 2008). Целые числа x, y и z образуют геометрическую прогрессию, а числа $5x+3$, y^2 и $3z+5$ – арифметическую прогрессию (в указанном порядке). Найдите x, y и z.

112. (МИОО 2010, 10 класс). Натуральные числа a, b, c образуют возрастающую арифметическую прогрессию, причем все они больше 1000 и являются квадратами натуральных чисел. Найдите наименьшее возможное, при указанных условиях, значение b.

113. (МИОО 2010, 10 класс). Натуральные числа a, b, c образуют возрастающую арифметическую прогрессию, причем все они больше 500 и являются квадратами натуральных чисел. Найдите наименьшее возможное, при указанных условиях, значение b.

114. Решите уравнение

$$\left[\frac{5+6x}{8}\right]=\frac{15x-7}{5}.$$

115. (МГУ, 1996) Решите уравнение

$$x+[10x]=10x.$$

116. (ММО, 1957, 9 класс) Решите уравнение $x^3-[x]=3$.

117. (МИОО 2010) Найдите все натуральные значения n, удовлетворяющие уравнению

$$2008\left[n\sqrt{1004^2+1}\right]=n\left[2008\sqrt{1004^2+1}\right],$$

где $[x]$ – наибольшее целое число, не превосходящее x.

118. (МИОО 2010) Найдите все пары $(x;y)$ целых чисел, удовлетворяющие системе неравенств:

$$\begin{cases}2x^2+2y^2+24x-28y+167<0,\\ x+2y<\dfrac{15}{2}.\end{cases}$$

119. (МГУ, 1972). Найдите все целые решения неравенства $x-1<\log_6(x+3)$.

120. (ММО, 1948, 9-10 классы). Сколько различных целочисленных решений имеет неравенство

$$|x|+|y|<100\,?$$

121. (МГУ, 2007). Найдите все пары целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases}x-y\le -25,\\ x^2-y\le 8,\\ 4x+y\le 1.\end{cases}$$

122. (МГУ, 2006). Найдите все целочисленные решения системы

$$\begin{cases}\left|x^2-2x\right|<y+1,\\ y+|x-1|<2.\end{cases}$$

123. (МГУ, 1985). Найдите все значения параметра a, при каждом из которых существует единственная пара целых чисел x и y, удовлетворяющая условиям

$$\begin{cases} -15x^2+11xy-2y^2=7, \\ x<y, \\ 2a^2x+3ay<0. \end{cases}$$

124. (МГУ, 1985). Найдите все значения параметра a, при каждом из которых существует единственная пара целых чисел x и y, удовлетворяющая условиям

$$\begin{cases} 3x^2+11xy+10y^2=7, \\ x+y>0, \\ 4a^2x-3ay<0. \end{cases}$$

125. (МГУ, 1992). Найдите все значения параметра b, при каждом из которых число целочисленных решений неравенства $x^2+3x+3|x+b|-b\le 0$ максимально.

126. (МГУ, 1992). Найдите все значения параметра q, при каждом из которых число целочисленных решений неравенства $x^2-5(x-1)+3|x-q|-q\le 0$ максимально.

127. (МИОО 2010, 10 класс). Найдите все значения параметра, при каждом из которых среди значений функции $y=\dfrac{x^2-2x+a}{6+x^2}$ есть ровно одно целое число.

128. (МИОО 2010, 10 класс). Найдите все значения параметра, при каждом из которых среди значений функции $y=\dfrac{x^2+2x-a}{6+x^2}$ есть ровно одно целое число.

129. (МГУ, 2007). Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множество решений неравенства $6x^2+4a^2+6ax-3x-24a+35<0$ содержит хотя бы одно целое решение.

130. (МГУ, 1999). Найдите все значения a, при каждом из которых ровно пять различных наборов натуральных чисел $(x;y;z)$ удовлетворяет системе условий

$$\begin{cases} 12x^2-4x-2xy+3y-9=0, \\ a\cdot yz+a\cdot xz+a\cdot xy>xyz. \end{cases}$$

131. (ММР, 11 класс, 2000/2001 учебный год) Сколько существует натуральных n таких, что $2000<\sqrt{n}<2001$?

132. (ММР, 10 класс, 1995/1996 учебный год) Найдите все целые решения неравенства:

$$x^2<1-2\sin 2x.$$

133. (ММР, 10 класс, 2004/2005 учебный год) Найдите все целые решения неравенства

$$|x+3y-5{,}5|+|x-3y|\le\frac{2005}{2006}?$$

Ответы, указания, решения

6. 1) 11; 2) 207; 3) 10^d-1, где $d=(m;n)$. **7.** 1) $2^3\cdot3^2\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13\cdot37$; 2) $2\cdot23^2\cdot61\cdot71$. **8.** 1) $d=1=5\cdot17-4\cdot21$; 2) $d=3=8\cdot843-21\cdot321$; 3) $d=42=$ $=111\cdot77222-355\cdot23520$. **10.** 2) а**)** Дробь может быть сокращена на 2 и ли на 5, или на 10, если на эти числа делится $a+4b$. ***Указание.*** $(3a+2b,a+4b)=(-10b,$ $a+4b)$, а $(b,a+4b)=1$; б) сокращение возможно лишь на 3, если $a+b$ делится на 3. **12.** 0, ±2. **13.** 576, 2916. **14.** 180. **15.** 28. **16.** 160, 169. **17.** 1996. **18.** 1, 2, 6. **19. 1)** 1; **2)** 3. **24.** 61. **27.** Да. **28.** $\frac{7}{81}(10^{n+1}-10-9n)$. **29.** $\underbrace{66...6}_{n+1\,цифра}7$. **31.** 9876543201. **32.** $(-1;-1)$; $(-1;1)$; $(1;-1)$; $(1;1)$. ***Указание.***

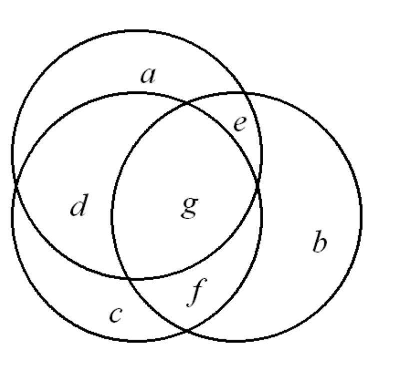
$$a^4+4b^4=((a-b)^2+b^2)((a+b)^2+b^2).$$

33. $99!<50^{99}$. ***Указание.***

$$99!=(50-49)(50-48)...(50-1)\times$$
$$\times50(50+1)(50+2)...(50+49)=$$
$$=50(50^2-1^2)(50^2-2^2)...(50^2-49^2)<$$
$$<50\cdot(50^2)^{49}<50^{99}.$$

34. Составным. ***Указание.*** Покажите, что $4^9+6^{10}+3^{20}=(2^9+3^{10})^2$. **35.** девять. **36.** восемь. **37.** 975. **38.** двумя нулями. **39.** 16. **40.** 1977. **41.** 1 и 3. **42.** 1; 3; 4; 8; 13; 28. **43.** 99. **44.** 3. **45.** 108. ***Указание.*** Удобно использовать «круги Эйлера». Пусть $x=a+b+c$ – количество человек, участвовавших ровно в одной олимпиаде; $y=d+e+f$ – количество человек, участвовавших ровно в двух олимпиадах. Рассмотрите системы уравнений

$\begin{cases} 2y+2g = x+y+g \\ 3g = x+y+g \end{cases}$ и $\begin{cases} a+d+e+g=100 \\ b+e+f+g=50 \\ c+d+g+f=48 \end{cases}$



46. 2^2. ***Указание.*** Так как $n^2+4n-33=n(n+4)-33$, то исходное выражение делится на 2 тогда и только тогда, когда n – нечетное, то есть $n=2k-1$. Тогда выражение будет иметь вид $4(k(k+1)-9)$, которое делится на 2^2. Множитель $k(k+1)-9$ – нечетное число, поэтому наибольшая степень 2^2.

47. Могут. Например, для чисел 444999 и 445000, идущих подряд, суммы цифр равны 39 и 13. **48.** $a=-12, b=6$. ***Решение.*** Подставим в уравнение $x=1+\sqrt{3}$. Получим равенство

$$(4a+b+42)+(2a+b+18)\sqrt{3}=0.$$

Равенство $A+B\sqrt{3}=0$, где A и B – целые, выполняется, если $B=0$.

Действительно, если $B\neq 0$, то $\sqrt{3}=-\dfrac{A}{B}$, т.е. иррациональное число $\sqrt{3}$ оказалось равно рациональному, что невозможно. Таким образом, $B=0$, а следовательно, и $A=0$. Решая систему $\begin{cases} 4a+b+42=0 \\ 2a+b+18=0, \end{cases}$ находим $a=-12, b=6$. **49.** $p=q=-2$. **50.** $a=-5, b=4$, $x_1=2$, $x_2=3$. ***Решение.*** Обозначим $3a+10=p$, $5b-14=q$. Тогда значение трехчлена при $x=1$ есть $f(1)=1+p+q$. Пусть x_1 и x_2 – корни трехчлена, $x_1<x_2$. Воспользовавшись формулами Виета $x_1\cdot x_2=q$, $x_1+x_2=-p$, запишем выражение $f(1)$ в виде $f(1)=1-(x_1+x_2)+x_1x_2$ и преобразуем его, разложив правую часть на множители:

$$f(1)=1-x_1+x_2(x_1-1)=(x_1-1)(x_2-1).$$

Так как $f(1)$, x_1 и x_2 по условию являются простыми числами, то числа x_1-1 и x_2-1 – натуральные и меньшее из них должно быть равно 1. Следовательно, $x_1-1=1$, откуда $x_1=2$. Тогда $f(1)=x_2-1$, т.е. x_2-1 и x_2 – два последовательных простых числа, что возможно только если этими числами являются 2 и 3. Итак, $x_2=3$, поэтому $p=3a+10=-5$, $q=5b-14=6$. Из двух последних равенств находим $a=-5, b=4$. **51.** 12; 13.

52. $a=-3$; $b=-1$. ***Решение.*** Обозначим корни квадратного уравнения через m и n. По теореме Виета $mn=3b+5$ – простое число, тогда $m=\pm 1$, $n=\pm(3b+5)$. Тогда $2a+9=\mp(3b+6)=\mp 3(b+2)$. Поэтому простое число $2a+9=3$, откуда $a=-3$. Тогда $b+2=1$, т.е. $b=-1$.

53. $x=4n+3$, $y=3n+2$, $n\in\mathbf{Z}$.

54. $(12;-4)$; $(2;-4)$; $(10;-2)$; $(4;-2)$; $(10;-6)$; $(4;-6)$. **55.** $(0;0)$; $(4;2)$.

56. $(6;-5)$; $(4;5)$; $(-4;-3)$. **57.** $(1;-1)$.

58. $(10;0)$; $(-10;0)$; $(1;3)$; $(17;3)$; $(18;4)$; $(6;4)$; $(-1;-3)$; $(-17;-3)$; $(-6;-4)$; $(15;5)$; $(-15;-5)$. **59.** $x=y=2$.

60. $x=0, y=0$; $x=2, y=2$. ***Первое решение.*** Пусть целые числа x и y таковы, что $x+y=xy$, тогда отсюда получим $y=\dfrac{x}{x-1}$. Поскольку x и $x-1$ два последовательных целых числа, то число y может быть целым только тогда, когда $x-1=\pm 1$, т.е. $x=0$ или $x=2$. Тогда получаем $y=0$ или $y=2$ соответственно.

Второе решение. Приведем уравнение $x+y=xy$ к виду $x(y-1)-y+1=1$ или $(x-1)(y-1)=1$. Отсюда получаем две системы.

$$1)\ \begin{cases} x-1=1, \\ y-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2, \\ y=2. \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} x-1=-1, \\ y-1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0, \\ y=0. \end{cases}$$

61. $x=2,\ y=0;\quad x=0,\ y=-2.$ ***Указание.*** $(x-1)(y+1)=1.$

62. $(0;0);(1;0);(0;1);(2;1);(1;2);(2;2).$

63. $(5;2;7);(5;7;2);(7;3;4);(7;4;3).$ ***Решение.*** Вычитая из второго уравнения системы первое, получим:

$$yz-y-z=5,\ \text{или}\ yz-y-z+1=6,$$
$$(y-1)(z-1)=6.$$

Будем искать лишь решения, удовлетворяющие условию $y<z$ (остальные решения получаются перестановкой значений y и z). При таком соглашении последнее уравнение сводится к одной из следующих двух систем:

$$\begin{cases} y-1=1 \\ z-1=6 \end{cases} \text{или} \begin{cases} y-1=2 \\ z-1=3. \end{cases}$$

Из первой системы $y=2,\ z=7,$ а из второй $y=3,\ z=4.$ Подставляя эти значения y и z в одно из уравнений заданной системы, получим соответствующие им значения $x=5$ или $x=7$.

64. $(1;9),(2;8),\ (0;2),\ (-1;3).$ ***Решение.*** Преобразуем уравнение:

$$y(2x-1)=2x^2+9x-2.$$

Так как x – целое, то $2x-1\neq 0,$ поэтому выразим y через x:

$$y=\frac{2x^2+9x-2}{2x-1}=x+5+\frac{3}{2x-1}.$$

Поскольку x и y – целые числа, то число $\frac{3}{2x-1}$ - тоже целое. Значит, $2x-1$ делитель 3, т.е.

1) $2x-1=1,\ x=1;$ 2) $2x-1=-1,\ x=0;$
3) $2x-1=3,\ x=2;$ 4) $2x-1=-3,\ x=-1.$

65. $x=2;\ y=1$ или $x=-2;\ y=-1$. ***Решение.*** Разложим левую часть на множители:

$$3x^2+4xy-7y^2=(x-y)(3x+7y).$$

Имеем $(x-y)(3x+7y)=13.$ Поскольку 13 можно представить в виде произведения двух целых чисел с учетом порядка четырьмя способами, то получаем четыре системы:

$$1)\ \begin{cases} x-y=1 \\ 3x+7y=13 \end{cases}\quad 2)\ \begin{cases} x-y=13 \\ 3x+7y=1 \end{cases}$$
$$3)\ \begin{cases} x-y=-1 \\ 3x+7y=-13 \end{cases}\quad 4)\ \begin{cases} x-y=-13 \\ 3x+7y=-1 \end{cases}$$

Целочисленные решения имеют лишь 1-я и 3-я системы.

66. $a=2.$ ***Указание.*** Положим $t=\frac{y}{x},$ тогда t – рациональное число, являющееся корнем уравнения $t^2-at+1=0.$ Но тогда $t=\frac{a\pm\sqrt{a^2-4}}{2}.$ Число $\sqrt{a^2-4}$ при целом a может быть рациональным только при $a=\pm 2.$

67. $(4;1);\ (4;-3);(-4;1);(-4;-3).$ ***Указание.*** Представим уравнение в виде $x^2=(y+1)^2+12$ или $x^2-(y+1)^2=12,$ $(x-y-1)(x+y+1)=12.$ Заметив, что каждая скобка – четное число, получаем 4 возможности, оттуда следует ответ.

68. $(13;14);\ (6;1).$ ***Решение.*** Рассматривая данное уравнение как квадратное

$$y^2+y(x-7)+84-2x-2x^2=0$$

относительно y, найдем дискриминант $D=9x^2-6x-287=(3x-1)^2-288,$ который должен быть точным квадратом, т.е. $(3x-1)^2-288=u^2.$ Отсюда следует, что $u<3x-1.$ Положим, $u=(3x-1)-k,$ где k – натуральное число. Тогда получаем:

$$(3x-1)^2-288=((3x-1)-k)^2,$$

или

$$2k(3x-1)=k^2+288,$$

откуда видно, что k – число четное. Пусть $k=2l,$ где l – натуральное число. Тогда находим: $l(3x-1)=l^2+72,$ или

$$3x=l+\frac{72}{l}+1.\ (*)$$

Отсюда видно, что число $\frac{72}{l}$ должно быть натуральным, т.е. l должно быть делителем числа 72. Возможные значения для l: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72. Из них надо взять лишь такие, для которых число $l+\frac{72}{l}+1$ кратно 3. Этому условию удовлетворяют лишь числа $l_1=2,\quad l_2=8,$

$l_3 = 9$, $l_4 = 36$. Затем из (*) находим для x два значения: 13 и 6. Из исходного уравнения найдем соответствующие (только натуральные) значения y.

69. $x = y = z = 0$. **70.** $(0;0;0)$. **71.** $(2;1)$; $(-2;-1)$. **72.** $(-2;2)$; $(-2;2)$; $(2;-2)$; $(2;2)$.

73. $(5;6),(-6;-5),(-3;4),(-4;3)$. ***Решение.*** Данное уравнение перепишем в виде $(y-x)(y^2+xy+x^2)=13\cdot 7$. Поскольку $y^2+xy+x^2=\left(y+\frac{x}{2}\right)^2+\frac{3x^2}{4}\geq 0$, то возможны только следующие четыре случая:

1) $\begin{cases} y-x=1 \\ y^2+xy+x^2=91 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=5 \\ y=6 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-6 \\ y=-5 \end{cases} \end{array}\right.$

2) $\begin{cases} y-x=7 \\ y^2+xy+x^2=13 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-3 \\ y=4 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-4 \\ y=3 \end{cases} \end{array}\right.$

3) $\begin{cases} y-x=13 \\ y^2+xy+x^2=7 \end{cases}$ Нет решений.

4) $\begin{cases} y-x=91 \\ y^2+xy+x^2=1 \end{cases}$ Нет решений.

74. $(1;2;3),(1;3;2)$, $(2;1;3),(2;3;1)$, $(3;1;2),(3;2;1)$. ***Решение.*** Для определенности пусть $x\leq y\leq z$. Из данного уравнения получаем $3z\geq xyz$. Рассмотрим случай равенства $3z=xyz$, $xy=3$, откуда

$\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$ или $\begin{cases} x=3 \\ y=1. \end{cases}$ При этих значениях x и y получаем из данного уравнения $z=2$. Все эти значения не соответствуют нашему условию $x\leq y\leq z$.

Теперь пусть $3z>xyz$, $xy<3$. Поскольку $0<x\leq y$, возможны только следующие варианты: $x=1$, $y=1$ или $x=1$, $y=2$. Для первого варианта получаем из данного уравнения $z=0$, что не соответствует условию задачи. Для второго варианта $z=3$. Таким образом, при условии $x<y<z$ исходное уравнение имеет одно решение $x=1$, $y=2$, $z=3$. Все остальные решения получаются из этого перестановками значений неизвестных x, y, z.

75. Нет решений. ***Указание.*** Перепишите уравнение в виде $19(x^3-100)=84(1+y^2)$. Правая часть кратна 7, поэтому x^3-2 кратно 7. Но кубы чисел при делении на 7 не дают в остатке 2.

76. $x=24$; $y=8$ или $x=54$; $y=2$. ***Решение.*** Перепишем данное уравнение в виде (учитывая, что $x\neq 0$; $y\neq 0$) $x=\frac{243y}{(y+1)^2}$.

Для того чтобы x было целым числом, знаменатель $(y+1)^2$ должен быть одним из делителей числа 243, потому что y не может иметь общие множители с $y+1$. Поскольку $243=3^5$, то 243 делится только на следующие числа, являющиеся точными квадратами: 1^2, 3^2, 9^2. Таким образом, число $(y+1)^2$ должно быть равно 1, 9 или 81, откуда находим, что y равно 8 или 2. Значит,

$x=\frac{243\cdot 8}{81}=24$ или $x=\frac{243\cdot 2}{9}=54$.

77. $m=-11250$; $n=-9$ или $m=-37500$; $n=-3$ или $m=0$; $n=0$ или $m=37500$; $n=3$ или $m=11250$; $n=9$. ***Решение.*** Перепишем данное уравнение в виде

$$m(n^2-1)=10^5 n. \qquad (1)$$

Если $n=0$, то $m=0$. Первое решение уравнения (1) найдено.

Если $n\neq 0$, то и $m\neq 0$. Заметим, что если пара чисел $(m_0;n_0)$ решение уравнения (1), то и пара $(-m_0;-n_0)$ – тоже решение уравнения (1).

Пусть $n>0$ и $m>0$, тогда $n\neq 1$. Перепишем уравнение (1) в виде

$$m(n-1)(n+1)=10^5 n. \qquad (2)$$

Так как ни $n-1$, ни $n+1$ не делятся на n, то m делится на n. Обозначим $m=np$.

Разделив равенство (2) на n, имеем:

$$p(n-1)(n+1)=10^5. \qquad (3)$$

Число n не может быть четным, так как в этом случае два соседних нечетных числа $n-1$ и $n+1$ не могут являться степенями числа 5. Следовательно, число n нечетное, а $n-1$ и $n+1$ – два соседних четных числа, не имеющих простых делителей, кроме 2 и 5.

Выпишем первые два столбца четных чисел так, чтобы в первом столбце стояли числа, не имеющие делителей, кроме 2 и 5.

$n-1$	$n+1$
2	4
8	10
20	22
32	34
50	52
80	82
128	130
200	202

При этом во втором столбце, начиная с третьей строки, все числа имеют простой делитель, кроме 2 и 5. Это означает, что из выписанных множителей $n-1$ и $n+1$ только две пары чисел удовлетворяют условию, т.е. $n=3$ и $n=9$ отвечают условиям задачи. Для последней строки таблицы из равенства (3) получим $p<5$, что невозможно. Поэтому поиск значений n закончен.

При $n=3$ из равенства (3) получим, что $p=12500$, тогда $m=pn=37500$.

При $n=9$ из равенства (3) получим, что $p=1250$, тогда $m=pn=11250$.

78. $x=3$; $y=11$. ***Решение.*** Представим левую часть в виде

$$\left(x^2+\frac{x}{2}+\frac{3}{8}\right)^2+\frac{5}{8}x+\frac{55}{64}=y^2.$$

Умножая обе части уравнения на 64, получаем $\left(8x^2+4x+3\right)^2+40x+55=\left(8y\right)^2$.

Таким образом,

$$8y>8x^2+4x+3,\quad 2y\ge 2x^2+x+1.$$

Умножим обе части исходного равенства на 4, а затем, используя

$$4y^2\ge\left(2x^2+x+1\right)^2=4x^4+4x^3+5x^2+2x+1,$$

будем иметь

$$4x^4+4x^3+4x^2+4x+4\ge$$
$$\ge 4x^4+4x^3+5x^2+2x+1,$$

или $x^2-2x-3\le 0$, откуда $x\le 3$. Осталось проверить для x значения 1, 2, 3.

79. Таких чисел нет. ***Решение.*** Так как

$$\left(x+y\sqrt{2}\right)^6=x^6+6x^5(y\sqrt{2})+$$
$$+15x^4(y\sqrt{2})^2+20x^3(y\sqrt{2})^3+$$
$$+15x^2(y\sqrt{2})^4+6x(y\sqrt{2})^5+(y\sqrt{2})^6=$$
$$=A+B\sqrt{2},$$

$$\left(x-y\sqrt{2}\right)^6=x^6-6x^5(y\sqrt{2})+$$
$$+15x^4(y\sqrt{2})^2-20x^3(y\sqrt{2})^3+$$
$$+15x^2(y\sqrt{2})^4-6x(y\sqrt{2})^5+(y\sqrt{2})^6=$$
$$=A-B\sqrt{2},$$

то выполняется

$$\left(x-y\sqrt{2}\right)^6+\left(u-v\sqrt{2}\right)^6=7-5\sqrt{2}.$$

Но $7-5\sqrt{2}<0$, а левая часть положительная. Противоречие. Следовательно, исходного равенства быть не может.

80. Таких чисел нет. **81.** 2011; 3015. ***Решение.*** При любом n пара $x=1$, $y=1$ не является решением. Поэтому

$$(xy)^n=(x^2+y^2)^{2010}\ge(2xy)^n>(xy)^{2010}.$$

Значит, $n>2010$.

Предположим, $x\ne y$. Тогда найдется простое число p, такое что $x=p^ka$, $y=p^mb$, и числа a и b не делятся на p. Для определенности можно считать, что $k>m\ge 0$. Тогда

$$(p^{2k}a^2+p^{2m}b^2)^{2010}=(p^{k+m}ab)^n;$$
$$(p^{2(k-m)}a^2+b^2)^{2010}=a^nb^np^{n(k+m)-2m\cdot 2010}.\ (*)$$

Из условий $n>2010$ и $k>m$ получаем:

$$n(k+m)-2m\cdot 2010=$$
$$=(nk-2010m)+m(n-2010)>0.$$

Значит, правая часть равенства $(*)$ – целое число, которое делится на p. Левая часть на p не делится. Противоречие.

Пусть теперь $x=y$, тогда из равенства $(x^2+x^2)^{2010}=(x^2)^n$ получаем:

$$x^{n-2010}=2^{1005}.$$

Откуда $x=2^q$, $q=0,1,2,...$ и $q(n-2010)=1005$. Поэтому $n-2010$ натуральный делитель числа 1005. По условию нас интересуют только наименьшее и наибольшее возможное значение n. Поэтому нужно взять $n-2010=1$ и $n-2010=1005$, откуда $n=2011$ и $n=3015$. При $n=2011$ $x=y=2^{1005}$, при $n=3015$ $x=y=2$.

82. 2013; 3018. ***Указание.*** Привести уравнение к виду $(x^2+y^2)^{2012}=x^n y^n$

83. $x=3; y=1$. ***Указание.*** Если $y=1$, то $x=3$ (второй корень квадратного уравнения $x=-1$ отрицателен). Пусть $y>1$. Числа x и $x+2$ одной четности, поэтому $(x+1)$ четно: $x+1=2k$. Получаем: $(2k-1)^{2y}+(2k)^{2y}=(2k+1)^{2y}$, откуда несложно увидеть (раскрыв скобки), что y кратно k при $y>1$. Разделив теперь обе части уравнения на $(2k)^{2y}$, получим:

$$2>\left(1-\frac{1}{2k}\right)^{2y}+1=\left(1+\frac{1}{2k}\right)^{2y}>1+\frac{2y}{2k}.$$

Отсюда $y<k$, а потому y не может делиться на k. Значит, при $y>1$ решений нет.

84. $(0;-2),(-2;0),(0;3),(2;1)$. ***Решение.*** Разложим левую часть уравнения на множители

$$y^2(3x+1)^2-y(3x+1)(3x+5)+2x^2+7x+6=$$
$$=\left(y(3x+1)-\frac{3x+5}{2}\right)^2-\left(\frac{x+1}{2}\right)^2=$$
$$=(y(3x+1)-2x-3)(y(3x+1)-x-2).$$

Откуда следует, что искомые числа удовлетворяют хотя бы одному из уравнений

$$y(3x+1)-2x-3=0 \quad \text{или}$$
$$y(3x+1)-x-2=0,$$

которые приводятся к виду

$$(3x+1)(3y-1)=5 \quad \text{или}$$
$$(3x+1)(3y-2)=7.$$

Решая эти уравнения в целых числах, получаем четыре пары чисел.

85. $(-2;2),(-4;0),(0;4)$. **86.** $(6;1;0)$, $(6;-1;0),(0;1;0),(0;-1;0)$. ***Решение.*** Из условия следует, что $3(x-3)^2\le 33$, т.е. $(x-3)^2\le 11$. Поскольку $(x-3)^2$ является квадратом целого числа $x-3$, то $(x-3)^2$ равно либо 0, либо 1, либо 4, либо 9. Перепишем исходное уравнение в виде

$$3(x-3)^2+(z^2+2)(3y^2+2)=37.$$

Если $(x-3)^2=0$, то $(z^2+2)(3y^2+2)=37$. Так как 37 – число простое, то последнее равенство выполняться не может.

Если $(x-3)^2=1$, то $(z^2+2)(3y^2+2)=34$. Поскольку $z^2+2\ge 2$, $3y^2+2\ge 2$, то возможны две системы

$$\begin{cases} z^2+2=2 \\ 3y^2+2=17 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} z^2+2=17 \\ 3y^2+2=2, \end{cases}$$

которые не имеют решений в целых числах.

Если $(x-3)^2=4$, то

$$(z^2+2)(3y^2+2)=25,$$

откуда следует система $\begin{cases} z^2+2=5 \\ 3y^2+2=5, \end{cases}$ которая не имеет решений в целых числах.

Если $(x-3)^2=9$, т.е. если $x=6$ или $x=0$, то $(z^2+2)(3y^2+2)=10$. Так как $z^2+2\ge 2$, $3y^2+2\ge 2$, то отсюда следуют две системы

$$\begin{cases} z^2+2=5 \\ 3y^2+2=2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} z^2+2=2 \\ 3y^2+2=5, \end{cases}$$

первая из которых не имеет решений в целых числах. Из второй системы получаем, что либо $z=0, y=1$, либо $z=0, y=-1$. Следовательно, исходному соотношению удовлетворяют четыре тройки чисел.

87. $(1;5;0),(1;-5;0),(-1;5;0),(-1;-5;0)$.

88. $(3;3;3)$; $(2;4;4)$; $(4;2;4)$; $(4;4;2)$; $(2;3;6)$; $(2;6;3)$; $(3;2;6)$; $(3;6;2)$; $(6;2;3)$; $(6;3;2)$. ***Решение.*** Поскольку неизвестные x, y, z входят в уравнение симметрично, то можно считать, что $x\le y\le z$. Остальные решения получатся перестановками неизвестных. Тогда

$$1=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\le\frac{3}{x}, \text{ т.е. } x\le 3.$$

Очевидно, что $x\ne 1$.

Пусть $x=2$, т.е. $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$. Также ясно, что $y\ne 2$. Если $y=3$, то $z=6$. Если $y=4$, то $z=4$. Если $y=5$, то даже $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}<\frac{1}{2}$, т.е. других решений при $x=2$ нет.

Если $x=3$, то $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{2}{3}$. Пусть $y=3$, тогда $z=3$. Если $y=4$, то даже $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}<\frac{2}{3}$, т.е. других решений при $x=3$ нет. Следовательно, данное уравнение с учетом перестановок имеет десять решений.

89. $(4;4)$; $(6;3)$; $(3;6)$. ***Указание.*** Выразите из уравнения y и исследуйте полученную функцию.

90. $m=150;\ n=30$ или $m=650;\ n=26$.

91. $(0;98)$; $(2;72)$; $(8;50)$; $(18;32)$; $(32;18)$; $(50;8)$; $(72;2)$; $(98;0)$. ***Решение.*** Из уравнения видно, что $0\le x\le 98$, $0\le y\le 98$. Представим уравнение в виде $\sqrt{y}=\sqrt{98}-\sqrt{x}$ и возведем обе части уравнения в квадрат:

$$y=98+x-2\sqrt{98x},\quad y=98+x-14\sqrt{2x}.$$

Отсюда $2x=4a^2$, $x=2a^2$, где a – целое неотрицательное число. Так как $x\le 98$, то $2a^2\le 98$, $a^2\le 49$, $0\le a\le 7$.

Для каждого из значений a получаем значения x, и затем значения y.

92. $m=2$, $n=1$. ***Решение.*** При любом k число $3^{2k}+1$ при делении на 8 дает остаток 2, а число $3^{2k+1}+1$ при делении на 8 дает остаток 4. Так как при $m\ge 3$ число 2^m делится на 8 без остатка, то равенство $3^n+1=2^m$ возможно при $m=1$ или $m=2$.

Если $m=1$, то получаем $n=0$.

Если $m=2$, то получаем $n=1$.

93. $m=3$, $n=2$ или $m=n=1$. ***Решение.*** Пусть n – четное число, т.е. $n=2k$. Тогда $2^m=(3^k-1)(3^k+1)$. Правая часть – произведение двух последовательных четных чисел, каждое из которых является степенью числа 2. Значит, $3^k-1=2$ и $3^k+1=4$, откуда $k=1$ и $n=2$. Тогда $m=3$.

Пусть теперь n – нечетное число. Нечетная степень тройки при делении на 4 дает остаток 3. Значит, 3^n-1 делится на 4 с остатком 2. Так как при $m\ge 2$ число 2^m делится на 4 без остатка, то равенство $2^m=3^n-1$ возможно в случае $m=1$. Тогда $n=1$.

94. $(4;1);(6;7)$. ***Решение.*** Рассмотрим два случая.

1. $x=2k+1$ (x – нечетное число). Поскольку 2^2 при делении на 3 дает в остатке 1, то и $2^{2k}=\left(2^2\right)^k$ дает в остатке 1, а $2^{2k+1}=2\cdot 2^{2k}$ дает в остатке 2. Число 15 делится на 3, следовательно, левая часть уравнения при делении на 3 дает в остатке 2. Правая часть (квадрат числа) дает при делении на 3 в остатке 0 или 1 (докажите). Таким образом, равенство невозможно (левая и правая части дают при делении на 3 разные остатки).

2. $x=2k$. Тогда $2^{2k}-y^2=15$, откуда $\left(2^k-y\right)\left(2^k+y\right)=15$. Оба множителя слева целые и положительные (так как второй множитель положителен), второй больше первого. Возможны два варианта:

$$\begin{cases}2^k-y=1\\2^k+y=15\end{cases}\quad\text{и}\quad\begin{cases}2^k-y=3\\2^k+y=5\end{cases}$$

Решая эти системы, получаем ответ.

95. $(1;1);(1;-1);(0;0)$. **96.** $n=0;\ x=3$ или $n=0;\ x=-3$. **97.** $k=0;\ n=\pm 2$ или $k=4;\ n=\pm 23$. ***Решение.*** При $k=1$ получаем уравнение $n^2=11$, которое не имеет решений в целых числах. Если $k=0$, то $n=\pm 2$.

При $k=-1$ уравнение не имеет решений в целых числах.

Если $k<-1$, то уравнение не имеет решений, так как левая часть данного уравнения принимает значения из промежутка $(1;2)$.

Пусть $k\ge 2$. Как известно, четные степени двойки дают при делении на 3 остаток 1, нечетные – 2. Отсюда следует, что $1+2^{2k+1}$ делится на 3 без остатка, а число $1+2^k+2^{2k+1}$ при делении на 3 дает такой же остаток, как у 2^k. С другой стороны, квадраты целых чисел не могут давать при делении на 3 остаток 2. Таким образом, k – четное. Положим $k=2d$, $d\in\mathbf{N}$ и перепишем уравнение в виде $1+4^d+2\cdot 4^{2d}=n^2$. Отсюда следует, что n – нечетное, т.е. $n=2x+1$, $x\in\mathbf{N}$. Получаем уравнение

$$1+4^d+2\cdot 4^{2d}=4x^2+4x+1;$$
$$4^d(1+2\cdot 4^d)=4(x^2+x);$$
$$4^y(1+8\cdot 4^y)=x(x+1),$$

где $y=d-1$. Причем $y>0$, так как при $d=1$, т.е. $y=0$ последнее уравнение не имеет решений.

Из чисел x и $x+1$ только одно четное, и оно делится на 4^y.

Если $x=m\cdot 4^y$ (причем m – нечетное, $m\in\mathbf{N}$), то имеем

$$4^y(1+8\cdot 4^y)=m\cdot 4^y(m\cdot 4^y+1);$$
$$1+8\cdot 4^y=m^2\cdot 4^y+m;\ (8-m^2)\cdot 4^y=m-1.$$

Сравнивая знаки левой и правой частей последнего уравнения, получаем одно нечетное $m=1$, которое не является решением.

Если $x+1=m\cdot 4^y$ (причем m – нечетное, $m\in N$), то имеем

$$4^y(1+8\cdot 4^y)=(m\cdot 4^y-1)m\cdot 4^y;$$
$$1+8\cdot 4^y=m^2\cdot 4^y-m;\ (m^2-8)\cdot 4^y=m+1.$$

Выражение m^2-8 неотрицательно при натуральных $m\ge 3$. Если $m=3$, то $y=1$ (что приводит к решению исходного уравнения $k=4;\ n=\pm 23$). При натуральных $m\ge 4$ будет $m^2-8>m+1$, и решений нет.

98. $k=2,\ n=4.$ ***Указание.*** Приведите уравнение к виду $(n)^k=(k)^n$. **99.** -13, -59. **100.** $n=5$. ***Решение.*** Запишем данное уравнение в виде

$$n(n-1)(n+1)=n(n-1)(n-2)(n-3)...2\cdot 1.$$

Так как $n=1$ не является его решением, то разделим обе части уравнения на $n(n-1)$. Получим, что $n+1=(n-2)\cdot(n-3)\cdot...\cdot 2\cdot 1$. Проверяя последовательные натуральные значения n, начиная с $n=2$, получим, что решением уравнения является $n=5$. Так как для всех $n>5$ верно, что $n+1<2n-4=2(n-2)$, то

$$n+1<(n-2)\cdot 2<(n-2)(n-3)...2\cdot 1,$$

поэтому других натуральных решений данное уравнение не имеет.

101. $n=2;\ k=5$. ***Решение.*** Предположим, что $n\ge 5$. Тогда $n!$ делится на 2 и 5, а значит десятичная запись числа в левой части оканчивается на 3 или на 8. Перебор по последней цифре показывает, что квадрат целого числа не может оканчиваться ни на 3, ни на 8.

Наконец, перебирая n от 1 до 4 находим единственное решение.

102. $x=1,\ y=1$. ***Решение.*** Рассмотрим случай, когда $x<y$, тогда

$$x!\big(1+(x+1)(x+2)...y\big)=$$
$$=x!(x+1)(x+2)...(x+y).$$

Поделив обе части этого уравнения на $x!$, легко заметить, что правая часть делится на $x+1$, а левая не делится, т.е. в этом случае данное уравнение не имеет решений в целых числах. Аналогично рассматривается случай, когда $x>y$. Пусть $x=y$, т.е. $2x!=(2x)!$ Поделив обе части этого уравнения на $x!$, получим $2=(x+1)(x+2)\cdot...\cdot 2x$, т.е. $x=1$, а следовательно, и $y=1$.

103. $x=3,\ y=2$. ***Решение.*** Так как $2y^2$ – четное число, то x – нечетно, и потому число $2y^2=x^2-1=(x-1)(x+1)$ делится на 4. Следовательно, y – четное число, и поскольку x и y должны быть простыми числами, то $y=2$, а потому $x=3$.

104. ***Решение.*** Перепишем уравнение в виде $(x+y)^3=7(x^2y+xy^2)+4$. Так как куб целого числа не может давать остаток 4 при делении на 7, то уравнение не имеет решений в целых числах.

Замечание. Другие решения задачи можно получить, рассматривая остатки, которые могут давать числа x и y при делении на 4, или заметив, что из уравнения следует, что $x+y$ – делитель числа 4.

105. ***Указание.*** Данное выражение преобразуйте к виду

$$(x-2y)(x-y)(x+y)(x+2y)(x+3y).$$

Полученные сомножители попарно различны. Но число 33 нельзя разложить более чем на 4 различных сомножителя.

106. ***Указание.*** Правая часть равенства всегда делится на более высокую степень двойки, чем левая.

107. ***Указание.*** Не существуют, так как m^2-n^2 нечетно или кратно 4, а 2010 – нет.

108. ***Указание.*** Рассмотреть остатки от деления левой и правой части на 3.

109. 840. ***Решение.*** Пусть в каждой из x коробок лежит три пакетика, по n шариков в каждом. Во втором случае коробок $x+2$, пакетиков в коробке 2, а шариков в пакетике $n+3$. По условию задачи получаем: $3nx = 2(n+3)(x+2)$, откуда

$$n = \frac{6x+12}{x-4} = 6 + \frac{36}{x-4} = 6\left(1 + \frac{6}{x-4}\right).$$

Заметим, что из $n > 0$ следует, что $\frac{6}{x-4} > -1$, откуда $x > 4$. Учитывая, что числа n и x натуральные, получаем, что $x-4$ – натуральный делитель числа 36. Количество шариков при этом

$$f(x) = 3nx = 18\left(x + \frac{6x}{x-4}\right) = 18\left(x + \frac{24}{x-4}\right) + 108.$$

Решение находим перебором делителей.

Комментарий. Перебор можно заменить исследованием функции. Функция $y = x + \frac{24}{x-4}$ монотонно убывает при $4 < x \le 4 + 2\sqrt{6}$ и монотонно возрастает при $x \ge 4 + 2\sqrt{6}$. Следовательно, наибольшее значение функции $f(x)$ достигается, если $x-4$ – наибольший или наименьший натуральный делитель числа 36.

Если $x-4=1$, то $x=5$,

$$f(5) = 18(5+24) + 108 = 630.$$

Если $x-4=36$, то $x=40$,

$$f(40) = 18\left(40 + \frac{2}{3}\right) + 108 = 840.$$

110. 2112. **111.** $(2;6;18), (2;-6;18)$. ***Решение.*** Из системы уравнений

$$\begin{cases} y^2 = xz, \\ 2y^2 = 5x + 3z + 8, \\ x, y, z \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

получим соотношение $2xz = 5x + 3z + 8$ $\Leftrightarrow$ $2z = 5 + \frac{31}{2x-3}$. Учитывая условие целочисленности, приходим к выводу, что выражение $\frac{31}{2x-3}$ принимает целые значения, т.е. разность $2x-3$ является делителем 31. Итак, возможны лишь случаи $2x-3 = \pm1; \pm31$. Осуществляя их перебор с учетом требований $xz \ge 0$, $y \in \mathbf{Z}$, имеем единственную возможность $x=2$, $z=18$, $y^2=36$, приводящую к ответу.

112. 2500. .***Решение.*** Пусть $a = a'^2$, $b = b'^2$, $c = c'^2$; $a' < b' < c'$; $a' \ge 32$; $b' = a' + t$, $t \in \mathbf{Z}$. Тогда $2a'^2 + 4a't + 2t^2 = a'^2 + c'^2$;

$(a' + 2t + c')(a' + 2t - c') = 2t^2$. Положим $p = a' + 2t + c'$, $q = a' + 2t - c'$; $p - q = 2c'$.

Значит, числа p и q – одинаковой четности, а так как $pq = 2t^2$, то $p = 2n$, $q = 2m$ $(n, m \in \mathbf{Z})$. Отсюда $t = 2v$ $(v \in \mathbf{Z})$.

Значит,

$$\begin{cases} a' + 2t = \dfrac{p+q}{2} = n + m \\ c' = \dfrac{p-q}{2} = n - m \\ nm = 2v^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a' = n + m - 4v \ge 32 \\ c' = n - m \ge 34 \\ nm = 2v^2 \end{cases}$$

При этих условиях необходимо найти минимум $b' = n + m - 2v$.

Так как $n \ge 35$, $m \ge 1$, то $2v^2 = nm \ge 35$. Отсюда $v \ge 5$.

Далее перебираем случаи:

1. $v = 5$. Тогда $\begin{cases} nm = 50, \ n + m \ge 52 \\ n - m \ge 34, \ n \ge 35, \ m \ge 1 \end{cases}$

Решений нет.

2. $v = 6$. Тогда $\begin{cases} nm = 72, \ n + m \ge 56 \\ n - m \ge 34, \ n \ge 35, \ m \ge 1 \end{cases}$

Отсюда $b' = 61$.

3. $v = 7$. Тогда $\begin{cases} nm = 98, \ n + m \ge 60 \\ n - m \ge 34, \ n \ge 35, \ m \ge 1 \end{cases}$

Отсюда $b' = 85$.

4. $v = 8$. Тогда $\begin{cases} nm = 128, \ n + m \ge 64 \\ n - m \ge 34, \ n \ge 35, \ m \ge 1 \end{cases}$

Отсюда $b' = 113$; $b' = 50$.

5. $v = 9$. Тогда $b' \ge 32 + 2v \ge 32 + 18 = 50$.

Значит, наименьшее значение $b = b'^2 = 2500$, при этом $a = 34^2$; $c = 62^2$.

113. 1369. **114.** $\frac{4}{5}$; $\frac{7}{15}$. **115.** $x_n = \frac{n}{9}$, $n = 0, 1, \ldots, 8$. ***Решение.*** Поскольку $[x] + \{x\} = x$, уравнение можно переписать в виде $x = \{10x\}$. Введем новую неизвестную $10x = t$. Для нее наше уравнение примет вид $\frac{t}{10} = \{t\}$. $(*)$

Это уравнение равносильно бесконечной совокупности систем $\begin{cases} n \le t < n+1 \\ \frac{t}{10} = t - n, \ n \in \mathbf{Z}. \end{cases}$

Уравнение $\frac{t}{10} = t - n$ при всех $n \in \mathbf{Z}$ имеет единственный корень $t_n = \frac{10n}{9}$. Это число будет корнем уравнения $(*)$ тогда и только тогда, когда выполнено неравенство

$n \le \frac{10n}{9} < n+1 \ \Leftrightarrow \ \begin{cases} n \ge 0 \\ n < 9 \end{cases} \ \Leftrightarrow \ n = 0, 1, ..., 8.$

116. $\sqrt[3]{4}$. ***Указание.*** $[x] = x - \{x\}$, где $0 \le \{x\} < 1$ – дробная часть; $x^3 - x + \{x\} = 3$, откуда $2 < x(x^2 - 1) \le 3$.

117. $n = 1, 2, 3, ..., 2008$. ***Решение.*** Понятно, что

$$1004 < \sqrt{1004^2 + 1} < 1005. \quad (*)$$

Пусть $\sqrt{1004^2 + 1} = 1004 + a$.

Покажем, что $\frac{1}{2009} < a < \frac{1}{2008}$. $(**)$

Действительно,

$$a = \sqrt{1004^2 + 1} - 1004 = \\ = \frac{(\sqrt{1004^2 + 1} - 1004)(\sqrt{1004^2 + 1} + 1004)}{\sqrt{1004^2 + 1} + 1004} = \\ = \frac{1}{\sqrt{1004^2 + 1} + 1004}.$$

Поэтому

$$a = \frac{1}{\sqrt{1004^2 + 1} + 1004} > \frac{1}{1005 + 1004} = \frac{1}{2009}$$

и

$$a = \frac{1}{\sqrt{1004^2 + 1} + 1004} < \frac{1}{1004 + 1004} = \frac{1}{2008}.$$

Теперь, используя $(**)$, получаем

$$2009a > 1 \text{ и } 2008a < 1. \ (***)$$

Тогда

$$n\left[2008\sqrt{1004^2 + 1}\right] = n\left[2008(1004 + a)\right] = \\ = n\left[2008(1004 + a)\right] = n\left[2008 \cdot 1004 + 2008a\right] = \\ = n \cdot 2008 \cdot 2004.$$

При $n = 1, ..., 2008$, используя $(***)$, вычисляем

$$2008\left[n\sqrt{1004^2 + 1}\right] = 2008[n(1004 + a)] = \\ = 2008[n \cdot 1004 + n \cdot a)] = 2008 \cdot n \cdot 1004$$

и следовательно, для $n = 1, ..., 2008$ выполнено соотношение из задачи.

При $n \ge 2009$, используя $(***)$, вычисляем

$$2008\left[n\sqrt{1004^2 + 1}\right] = 2008[n(1004 + a)] = \\ = 2008[n \cdot 1004 + n \cdot a)] = 2008 \cdot (n \cdot 1004 + 1)$$

и следовательно, для $n \ge 2009$ соотношение из условия задачи не выполнено.

118. $(-7; 7)$, $(-6; 6)$. ***Решение.*** Выделяя полные квадраты, получаем:

$$\begin{cases} (x+6)^2 + (y-7)^2 < \frac{3}{2} = \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2, \\ x + 2y < \frac{15}{2}, \\ x, \ y \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Первое неравенство имеет пять пар решений:

$$(-6; 7), \ (-5; 7), \ (-6; 8); \ (-7; 7), \ (-6; 6).$$

Второму условию системы удовлетворяют только четвертая и пятая пары.

119. $-2; -1; 0; 1$. ***Решение.*** В область допустимых значений неизвестной входят только $x > -3$, и легко проверить непосредственно, что числа $-2; -1; 0; 1$ являются решениями данного неравенства.

При подстановке следующих значений, мы видим, что они не являются решениями: при увеличении x разность между левой и правой частями увеличивается. Задача сводится к следующей: *доказать, что функция* $f(x) = x - \log_6(x+3)$ – *возрастающая*. Имеем $f(x+1) - f(x) =$

$= x + 1 - \log_6(x+4) - x + \log_6(x+3) =$

$= \log_6 \frac{x+3}{x+4} + 1$, так что неравенство $f(x+1) - f(x) > 0$ равносильно неравенству $\frac{x+3}{x+4} > \frac{1}{6}$, которое выполняется при положительных значениях x. Следовательно, неравенство выполняется только при полученных выше значениях.

120. 19801. **121.** $(-5;20)$, $(-5;21)$.

122. $(0;0)$, $(2;0)$, $(1;1)$. ***Указание.*** Из данной системы следует, что $-1<y<2$, так что возможны лишь $y=0$ и $y=1$.

123. $-\frac{13}{3}<a\le-\frac{19}{5}$. ***Решение.*** Уравнение системы приводим к виду $(3x-y)(2y-5x)=7$ и затем решаем четыре системы уравнений в целых числах. Из четырех решений $(15;38)$, $(9;26)$, $(-15;-38)$, $(-9;-26)$ только пары $(15;38)$ и $(9;26)$ удовлетворяют неравенству $x<y$.

Таким образом, требуется найти все значения параметра a, при каждом из которых выполняется только одно из неравенств $2a^2\cdot15+3a\cdot38<0$ и $2a^2\cdot9+3a\cdot26<0$ или $5a^2+19a<0$ и $3a^2+13a<0$.

Множество решений первого неравенства имеет вид $-\frac{19}{5}<a<0$. Решения второго неравенства составляют промежуток $-\frac{13}{3}<a<0$. Следовательно, условию задачи удовлетворяют все числа a из промежутка $-\frac{13}{3}<a\le-\frac{19}{5}$.

124. $-\frac{5}{11}<a\le-\frac{1}{3}$. **125.** $\{4\}\cup[2{,}25;2{,}5]$.

126. $[3{,}25;3{,}5]\cup\{5\}$.

127. $1<a<11$. ***Решение.*** Функция определена и непрерывна при всех $x\in\mathbf{R}$. Выделим целую часть $y=1-\frac{2x+6-a}{6+x^2}$. Отсюда следует, что при любом a среди значений функции есть число 1, для этого достаточно выполнения условия $2x+6-a=0$ или $x=\frac{a-6}{2}$. Теперь поставим условия, при которых множество значений данной функции содержатся в промежутке (0; 2) при всех значениях $x\in\mathbf{R}$..

$$0<1-\frac{2x+6-a}{6+x^2}<2 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad -1<-\frac{2x+6-a}{6+x^2}<1 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad -6-x^2<-2x-6+a<6+x^2 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \begin{cases}x^2-2x+a>0\\ x^2+2x+12-a>0\end{cases} \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \begin{cases}D'=1-a<0\\ D'=1-12+a<0\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}a>1\\ a<11\end{cases} \quad\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow\ 1<a<11$. **128.** $-11<a<-1$. **129.** (2; 7). ***Указание.*** Необходимым и достаточным условием существования решений квадратного относительно a неравенства является $(3x-12)^2-4(6x^2-3x+35)>0$, т.е. $-2-\frac{8}{\sqrt{15}}<x<-2+\frac{8}{\sqrt{15}}$. Полученному интервалу принадлежат всего пять целых значений x, для каждого из которых надо найти соответствующие значения параметра a. **130.** $\left(\frac{5}{11};\frac{6}{13}\right]$. ***Указание.*** Из первого уравнения получаем $y=6x+7+\frac{12}{2x-3}$, откуда x может равняться 1, 2 или 3, а y, соответственно, 1, 31 и 29. Осталось подставить найденные пары в неравенство исходной системы и выяснить, при каких a ровно пять натуральных чисел z дают вместе с x и y решения задачи. **131.** 4000.

132. $-1;0$. ***Решение.*** Исходя из неравенств $-1\le1-2\sin2x\le3$ получаем $x^2<3$. Так как $x\in\mathbf{Z}$, то $x=0$ или $x=\pm1$.

При $x=0$ неравенство $0<1$ верно.

Если $x=-1$, то неравенство $-1<1+2\sin2$ справедливо, так как $\sin2>0$.

Для $x=1$ неравенство $1<1-2\sin2$ ложное.

133. $(3;1)$.

Список и источники литературы

1. Единый государственный экзамен 2010. Математика. Универсальные материалы для подготовки учащихся / ФИПИ – М.: Интеллект-Центр, 2011.

2. ЕГЭ 2010. Математика: Сборник тренировочных работ / Высоцкий И.Р., Захаров П.И., Панфёров В.С., Семёнов А.В., Сергеев И.Н., Смирнов В.А., Шестаков С.А., Ященко И.В. – М.: МЦНМО, 2009.

4. ЕГЭ 2010. Математика. Типовые тестовые задания /под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. – М.: Издательство «Экзамен», 2010.

5. Панферов В. С., Сергеев И. Н. Отличник ЕГЭ. Математика. Решение сложных задач; ФИПИ – М.: Ителлект-Центр, 2010.

6. Самое полное издание типовых вариантов реальных заданий ЕГЭ 2010: Математика /авт.-сост. И.Р. Высоцкий, Д.Д. Гущин, П.И. Захаров и др.; под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. – М.: АСТ: Астрель, 2009. – (Федеральный институт педагогических измерений).

7. Ященко И. В., Шестаков С. А., Захаров П. И. Подготовка к ЕГЭ по математике в 2010 году. Методические указания. – М.: МЦНМО, 2009.

8. Бардушкин В.Н., Кожухов И.Б., Прокофьев А.А., Фадеичева Т.П. Основы теории делимости чисел. Решение уравнений в целых числах. Факультативный курс. – М.: МГИЭТ (ТУ), 2003.

9. Галкин В.Я., Сычугов Д.Ю., Хорошилова Е.В. Конкурсные задачи, основанные на теории чисел. – М., факультет ВМиК МГУ, 2002.

10. Гальперин Г. А., Толпыго А. К. Московские математические олимпиады: Кн. Для учащихся / Под ред. А.Н. Колмогорова. – М.: Просвещение, 1986.

11. Галкин Е.В. Нестандартные задачи по математике. Задачи с целыми числами: Учеб. пособие для учащихся 7—11 кл. – Челябинск: Взгляд, 2005. — 271 с. – (Нестандартные задачи по математике).

12. Математика. Алгебра. Начала математического анализа. Профильный уровень: задачник для 10-11 классов / М.И. Шабунин, А.А. Прокофьев, Т.А. Олейник, Т.В. Соколова. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2009. – 477 с.

13. Математика. Алгебра. Начала математического анализа. Профильный уровень: учебник для 11 класса / М.И. Шабунин, А.А. Прокофьев. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2011. – 391 с.

14. Московские математические регаты / Сост. А.Д. Блинков, Е. С. Горская, В.М. Гуровиц. – М.: МЦНМО, 2007.

15. Пукас Ю. Так сколько же детей можно перевезти из летнего лагеря? // Еженедельная учебно-методическая газета «Математика» (приложение к «Первое сентября», №8, 2010, – стр. 15-16.

16. Пратусевич М.Я. и др. ЕГЭ 2011. Математика. Задача С6. Арифметика и алгебра / Под ред. А.Л. Семенова и И.В. Ященко. – М.: МЦНМО, 2011. – 48 с.

17. Саржевский В. И. Применение теории делимости к решению неопределенных уравнений в целых числах. (Лицей информационных технологий № 1537)

18. Сивашинский И.Х. Задачи по математике для внеклассных занятий (9-10 классы). М., «Просвещение», 1968.

19. Фалин Г.И. Алгебра на вступительных экзаменах по математике в МГУ / Г.И. Фалин, А.И. Фалин. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. – 367 с.

20. Шарыгин И.Ф. Факультативный курс по математике: Решение задач: Учеб. пособие для 10 кл. сред. шк. – М.: Просвещение, 1989.

21. www.mathege.ru – Математика ЕГЭ 2010 (открытый банк заданий)

22. www.alexlarin.narod.ru – сайт по оказанию информационной поддержки студентам и абитуриентам при подготовке к ЕГЭ, поступлению в ВУЗы и изучении различных разделов высшей математики.

23. www.shevkin.ru – Задания С6 из ЕГЭ 2010 по математике.

24. www.fdp.fa.ru – Финакадемия. Факультет довузовской подготовки.